Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

74. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 17. OKTOBER 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

74. Band **Inhalt** **4. Heft**

Seite

Itô, N., Zur Theorie der Permutationsgruppen vom Grad p 299

Ehlich, H., Über zwei Randwertaufgaben für nichtlineare Differentialgleichungssysteme 302

Eweida, M. T., On Bessel Polynomials 319

Specht, W., Zur Theorie der meßbaren Gruppen 325

Lingenberg, R., Einbettung projektiv-metrischer Teilstrukturen in projektiv-metrische Ebenen 367

Itô, N.
Math. Zeitschr. 74, 299—301 (1960)

Zur Theorie der Permutationsgruppen vom Grad p.

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet.

Von

Noboru Itô

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis von folgendem

Satz. *Es sei Ω die Menge der Ziffern $1, 2, \ldots, p$, wobei p eine Primzahl $\geqq 5$ bezeichnet. $\mathfrak{G}$ sei eine nicht auflösbare transitive Permutationsgruppe auf Ω, in der der Normalisator einer p-Sylowgruppe die Ordnung $2p$ besitzt. Dann ist $p = 2^m + 1$ und $\mathfrak{G}$ ist zu der linearen Gruppe $SL(2, 2^m)$ isomorph.*

Beweis. Nach einem bekannten Satz von Burnside ist $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv. Also zerfällt der zu $\mathfrak{G}$ gehörige Permutationscharakter in den Hauptcharakter 1 und einen irreduziblen Charakter B des Grades $p-1$. Es gilt für jedes Element G aus $\mathfrak{G}$ die Gleichung $B(G) = \alpha_1(G) - 1$. Dabei bezeichnet $\alpha_1(G)$ die Anzahl der Ziffern, die von G fest gelassen werden.

Sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler $> \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$. Es bezeichne $\mathfrak{G}(p)$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)$ den Normalisator von $\mathfrak{G}(p)$ in $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}(p)$ ist zyklisch von der Ordnung p. Als eigentlicher Normalteiler einer primitiven Gruppe ist $\mathfrak{N}$ transitiv. Daher gilt $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{G}(p)$. Angenommen, es ist $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{G}(p)$. Dann zerfällt $\mathfrak{N}$ nach einem Satz von Burnside in das Produkt von $\mathfrak{G}(p)$ mit einem Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$: es ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}(p)\,\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$. $\mathfrak{H}$ ist das einzige p-Sylowkomplement von $\mathfrak{N}$. Also ist $\mathfrak{H}$ normal in $\mathfrak{G}$. Weil $\mathfrak{H}$ nicht transitiv ist, gilt $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}(p)$, $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) = \mathfrak{G}$. Daher hat $\mathfrak{G}$ die Ordnung $2p$ und ist auflösbar entgegen der Voraussetzung. Also haben wir $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{G}(p)$ und daher $\mathfrak{N} \geqq \mathrm{Ns}\,(\mathfrak{G}(p))$, weil $|\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)| = 2p$. Dabei bezeichnet $|\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)|$ die Ordnung von $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)$. Nach dem Satz von Sylow gilt aber $\mathfrak{G} : \mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) = \mathfrak{N} : \mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}$. Also ist $\mathfrak{G}$ einfach.

Folglich stimmt $\mathfrak{G}$ mit seiner Kommutatoruntergruppe überein. p teilt die Ordnung von $\mathfrak{G}$ nur zur ersten Potenz. $\mathfrak{G}(p)$ ist sein eigener Zentralisator in $\mathfrak{G}$. Also können wir auf $\mathfrak{G}$ die p-Blocktheorie von R. Brauer über Gruppen mit diesen Eigenschaften anwenden [2].

Da die Ordnung von $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)$ gleich $2p$ ist, besteht der erste p-Block $\mathsf{B}_1(p)$ von Charakteren von $\mathfrak{G}$ aus zwei irreduziblen Charakteren, die mit 1 und B übereinstimmen und je für sich eine Familie p-konjugierter Charakter bilden, und aus einer Familie von $\frac{p-1}{2}$ p-konjugierten irreduziblen Charakteren $C^{(\nu)}\left(\nu = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ ([1, S. 410, Theorem 2]. Unter unseren Voraussetzungen ist $l = 1$.) Alle anderen irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ gehören zu

p-Blöcken mit Defekt 0, verschwinden also für jedes p-singuläre Element von $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\mathfrak{G}(p) = \langle P \rangle$. Dann haben wir $B(P^i) = \alpha_1(P^i) - 1 = -1$ für $i = 1, \ldots, p-1$; denn P läßt keine Ziffer fest. Für jedes p-reguläre Element G von $\mathfrak{G}$ und insbesondere für die $G \in \mathfrak{G}_1$ (die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die die Ziffer 1 fest läßt) gilt die Gleichung $1 + C^{(\nu)}(G) = B(G)$ [2, (10)]. Es ist dort nach dem eben Bemerkten $\alpha = \beta = 1$, $A_1 = 1$, $B_1 = B$ und δ ermittelt man mit $G = E$ zu $\delta = +1$, also $C^{(\nu)}(G) = \alpha_1(G) - 2$. Insbesondere haben wir $C^{(\nu)}(E) = p - 2$ $\left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$. Aus der Orthogonalitätsrelation $\sum_{\chi} \chi(P^i)\,\chi(E) = 0$, wobei χ alle irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ durchläuft, folgt $0 = \sum_{\chi} \chi(P^i)\,\chi(E) = \sum_{\chi \in \mathfrak{B}_1(p)} \chi(P^i)\,\chi(E) = 1 - (p-1) + (p-2) \sum_{\nu} C^{(\nu)}(P^i)$, also haben wir $\sum_{\nu} C^{(\nu)}(P^i) = 1$.

Sei $C^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{G}_1$ reduzibel und $C^{(\nu)} = m_1 C_1 + m_2 C_2 + \cdots$ die Zerlegung von $C^{(\nu)}$ in irreduzible Bestandteile von $\mathfrak{G}_1$. Dann kann man etwa $C_1(E) \leqq \frac{p-2}{2}$ annehmen. Wir betrachten den Charakter C^* von $\mathfrak{G}$, der von C_1 induziert wird. Da $B = C^{(\nu)} + 1$ und $C^{(1)} = \cdots = C^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ auf $\mathfrak{G}_1$, so sind nach dem Reziprozitätssatz von FROBENIUS $C^{(1)}, \ldots, C^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ und B in C^* mit der Vielfachheit m_1 enthalten. Also haben wir die Ungleichung $C^*(E) \geqq m_1 \left(C^{(1)}(E) + \cdots + C^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}(E) + B(E)\right)$. Daraus folgt $\frac{p(p-2)}{2} \geqq \frac{p-1}{2}(p-2) + p - 1 = \frac{p(p-1)}{2}$. Das ist ein Widerspruch. Also bleibt $C^{(\nu)}$ irreduzibel auf $\mathfrak{G}_1$.

$B(G) = 1 + C^{(\nu)}(G)$ $(G \in \mathfrak{G}_1)$ ist der Charakter der Permutationsdarstellung von $\mathfrak{G}_1$ auf $\Omega - \{1\}$ also ist $\mathfrak{G}_1$ auf $\Omega - \{1\}$ zweifach transitiv und daher ist $\mathfrak{G}$ auf Ω dreifach transitiv.

Nun sei $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe der Ordnung $p!$ auf Ω und X der Charakter von $\mathfrak{S}$, der dem Diagramm $\begin{matrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & & & \\ \circ & & & \end{matrix}$ entspricht. Es ist $X(S) = \frac{(\alpha_1(S)-1)(\alpha_1(S)-2)}{2} - \alpha_2(S)$, $S \in \mathfrak{S}$ [3], wobei $\alpha_2(S)$ die Anzahl der Transpositionen in der Zyklendarstellung von S bezeichnet. Insbesondere haben wir $X(E) = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ und $X(P^i) = 1$. Da $\mathfrak{G}$ dreifach transitiv ist, ist X orthogonal zu 1 und B auf $\mathfrak{G}$ [4]. Also enthält X auf $\mathfrak{G}$ einen irreduziblen Charakter aus $B_1(p)$ und zwar ein $C^{(\nu)}$. Da X bekanntlich ein rationaler Charakter ist und alle $C^{(\nu)}$ miteinander algebraisch konjugiert sind, umfaßt dann X alle $C^{(\nu)}$. Vergleichen wir die Grade der beiden Charakter X und $\sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} C^{(\nu)}$, so haben wir $X = \sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} C^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{G}$. Insbesondere erhalten wir für jedes p-reguläre Element G aus $\mathfrak{G}$ die Gleichung $\frac{(\alpha_1(G)-1)(\alpha_1(G)-2)}{2} - \alpha_2(G)$

$= \frac{p-1}{2}(\alpha_1(G)-2)$. Daraus folgt $\frac{(p-\alpha_1(G))(\alpha_1(G)-2)}{2}+\alpha_2(G)=0$. Dann haben wir $G=E$ für jedes Element G mit $\alpha_1(G)\leqq 3$. Also läßt jedes Element $G\neq E$ aus $\mathfrak{G}$ höchstens zwei Ziffern fest. Da $\mathfrak{G}$ dreifach transitiv ist, haben wir $g=p(p-1)(p-2)$. Dann ist nach einem bekannten Satz von ZASSENHAUS [5] $\mathfrak{G}\cong SL(2, 2^m)$ mit $2^m=p-1$.

Literatur

[1] BRAUER, R.: On groups whose order contains a prime number to the first power I. Amer. J. Math. **64**, 401–420 (1942).

[2] BRAUER, R.: On permutation groups of prime degree and related classes of groups. Ann. of Math. **44**, 57–79 (1943).

[3] FROBENIUS, G.: Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe. Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wiss. 516–534 (1900).

[4] FROBENIUS, G.: Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen. Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wiss. 528–571 (1904).

[5] ZASSENHAUS, H.: Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 17–40 (1935).

Dept. of Math., University of Nagoya (Japan)

(Eingegangen am 3. Mai 1960)

EHLICH, H.
Math. Zeitschr. 74, 302–318 (1960)

Über zwei Randwertaufgaben für nichtlineare Differentialgleichungssysteme

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

HARTMUT EHLICH

§1. Aufgabenstellung

1. In Zusammenhang mit einem chemischen Problem haben Herr M. MÜLLER und ich[1]) für das System

$$(1.1) \qquad \begin{cases} y_1' = -k_1 y_1 (C + y_1 + y_2) \\ y_2' = -k_2 y_2 (C + y_1 + y_2) \end{cases} \qquad C \geqq 0; \quad k_1, k_2 > 0$$

die Randwertaufgabe

$$(1.2) \qquad \begin{cases} y_1(\xi_1) > 0, & y_2(\xi_1) > 0 \\ y_1(\xi_1) + y_2(\xi_1) = c_1, & y_1(\xi_2) + y_2(\xi_2) = c_2 \end{cases} \qquad \xi_2 > \xi_1, \; c_1 > 0, \; c_2 > 0$$

behandelt, die, falls $k_1 \neq k_2$ ist, für jedes $\xi_2 > \xi_1$, unter gewissen Einschränkungen für c_2, genau eine Lösung besitzt; wir haben insbesondere gezeigt, wie man bei bekannten c_1 und c_2 die einzelnen Anfangswerte $y_1(\xi_1)$ und $y_2(\xi_1)$ berechnen kann.

Verallgemeinerungen dieser Fragestellung sollen in der vorliegenden Note für das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$(1.3) \qquad y_\nu' = -k_\nu y_\nu \Big(C + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \Big) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

untersucht werden. Dabei seien die k_ν positive Konstanten und C eine nicht negative Konstante; die Numerierung wählen wir so, daß

$$(1.4) \qquad 0 < k_n \leqq k_{n-1} \leqq \cdots \leqq k_1$$

ist. Sind ϱ, σ, τ verschiedene der Zahlen $1, \ldots, n$ mit $\varrho < \sigma < \tau$, so behandeln wir[2])

---

[1]) EHLICH, H., u. MÜLLER, M.: Über die Differentialgleichungen der bimolekularen Reaktion 2. Ordnung. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss., math.-nat. Kl., 4. Abh., **1959**, 187–218.

[2]) Leere Summen sind wie üblich gleich Null zu setzen, leere Bedingungen als nicht gestellt anzusehen.

(*a*) *die Randwertaufgabe: Es sei* $n \geqq 2$, $\eta_\nu \geqq 0$ *und fest für* $\nu = 1, \ldots, n$, $\nu \neq \varrho, \sigma$. *Unter welchen Bedingungen für* c_1, c_2 *und* ξ_1, ξ_2 *gibt es ein Integral* $\mathfrak{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ *des Systems* (1.3), *so daß für* $\nu = 1, \ldots, n$, $\nu \neq \varrho, \sigma$

$$y_\nu(\xi_1) = \eta_\nu$$

und für verschiedene Zahlen $\nu_\lambda \in \{1, \ldots, n\}$, $(\lambda = 1, \ldots, m,\ m \leqq n-2)$, $\nu_\lambda \neq \varrho, \sigma$

$$\sum_{\lambda=1}^{m} y_{\nu_\lambda}(\xi_\mu) + y_\varrho(\xi_\mu) + y_\sigma(\xi_\mu) = c_\mu \qquad (\mu = 1, 2)$$

sowie

$$y_\varrho(\xi_1) \geqq 0, \qquad y_\sigma(\xi_1) \geqq 0$$

ist;

(*b*) *die Interpolationsaufgabe: Es sei* $n \geqq 3$, $\eta_\nu \geqq 0$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$, $\nu \neq \varrho, \sigma, \tau$. *Unter welchen Bedingungen für* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 $(\xi_1 < \xi_2 \leqq \xi_3)$ *gibt es ein Integral* $\mathfrak{y}(x)$ *von* (1.3), *so daß*

$$y_\nu(\xi_1) = \eta_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n, \qquad \nu \neq \varrho, \sigma, \tau$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\xi_\mu) = c_\mu \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

mit nichtnegativen Anfangswerten $y_\varrho(\xi_1)$, $y_\sigma(\xi_1)$, $y_\tau(\xi_1)$ *ist?*[3])

Die Randwertaufgabe (1.2) für das System (1.1) ist für $n = 2$ in der Aufgabe (*a*) enthalten.

2. Die rechten Seiten des Systems (1.3) besitzen stetige partielle Ableitungen nach allen y_ν; daher gibt es durch jeden Punkt $(\xi_1, \vec{\eta}) = (\xi_1, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ des $(n+1)$-dimensionalen $(x, \mathfrak{y})$-Raumes genau ein Integral. Setzen wir

$$K_\nu = \frac{k_\nu}{k_1} \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

so erhalten wir dieses Integral durch

$$y_\nu(x) = \eta_\nu e^{K_\nu y(x)} \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

wo $y(x)$ das durch den Punkt $(\xi_1, 0)$ gehende, eindeutig bestimmte Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -k_1 \left(C + \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu y} \right) \tag{1.7}$$

ist. Denn nach (1.5), (1.6) und (1.7) ist für $\nu = 1, \ldots, n$

$$y_\nu'(x) = \eta_\nu e^{K_\nu y(x)} K_\nu y'(x) = y_\nu(x) K_\nu y'(x) = -k_\nu y_\nu(x) \left(C + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda(x) \right).$$

Da aus $y(\xi_1) = 0$ auch $y_\nu(\xi_1) = \eta_\nu$ folgt, stellen die durch (1.6) definierten Funktionen $y_\nu(x)$ das durch den Punkt $(\xi_1, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ gehende Integral von (1.3) dar. Daher lassen sich die Aufgaben (*a*) und (*b*) wie folgt formulieren: Unter welchen Bedingungen für c_2 und ξ_2, bzw. c_2, c_3, ξ_2, ξ_3 gibt es

[3]) Die Formulierung der Aufgaben (*a*) und (*b*) wird einfacher, wenn man die Normierung $\varrho = 1$, $\sigma = 2$, $\tau = 3$ einführt. Für die Rechnungen erweist sich jedoch die Normierung (1.4) als zweckmäßig.

(a_1) *nicht negative Zahlen* $\eta_\varrho, \eta_\sigma$ *und ein Integral* $y(x)$ *von* (1.7) *mit* $y(\xi_1)=0$ *— die rechte Seite der Differentialgleichung hängt von* η_ϱ *und* η_σ *ab —, so daß für verschiedene Zahlen* $\nu_\lambda \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda=1, \ldots, m$, $\nu_\lambda \neq \varrho, \sigma$

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} y(\xi_\mu)} + \eta_\varrho e^{K_\varrho y(\xi_\mu)} + \eta_\sigma e^{K_\sigma y(\xi_\mu)} = c_\mu, \qquad \mu = 1, 2$$

ist, und

(b_1) *nichtnegative Zahlen* $\eta_\varrho, \eta_\sigma, \eta_\tau$ *und ein Integral* $y(x)$ *von* (1.7) *mit* $y(\xi_1)=0$ *— jetzt ist die rechte Seite der Differentialgleichung von* η_ϱ, η_σ *und* η_τ *abhängig —, so daß*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu y(\xi_\mu)} = c_\mu, \qquad \mu = 1, 2, 3$$

ist.

3. Da aus $\eta_\nu=0$ nach (1.6) $y_\nu(x) \equiv 0$ folgt, setzen wir im folgenden voraus, daß die *„bekannten* η_ν" in (1.7) positiv sind, daß also

$$\text{(1.8)} \qquad \eta_\nu > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad \begin{cases} \nu \neq \varrho, \sigma & \text{für } (a) \text{ und } (a_1) \\ \nu \neq \varrho, \sigma, \tau & \text{für } (b) \text{ und } (b_1) \end{cases}$$

ist. Ferner ergibt sich aus (1.4) und (1.5)

$$\text{(1.9)} \qquad 0 < K_n \leqq K_{n-1} \leqq \cdots \leqq K_1 = 1.$$

4. Man erkennt sofort: *Es gibt höchstens dann eine Lösung der Aufgaben* (a_1) *und* (b_1), *wenn*

$$\text{(1.10)} \qquad c_1 \geqq \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} \quad \textit{bzw.} \quad c_1 \geqq \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varrho, \sigma, \tau}}^{n} \eta_\nu$$

ist. Steht dabei in einer der beiden Ungleichungen (1.10) das Gleichheitszeichen, so ist $\eta_\varrho=\eta_\sigma=0$ bzw. $\eta_\varrho=\eta_\sigma=\eta_\tau=0$ zu wählen. Das Integral $y_0(x)$ von (1.7) mit $y_0(\xi_1)=0$ ist in diesen Fällen eindeutig bestimmt. Wir erhalten es aus

$$\int_0^{y_0} \frac{dt}{C + \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu t}} = -k_1(x - \xi_1).$$

Da der Integrand für alle $t>0$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt, existiert $y_0(x)$ für alle $x>\xi_1$, ist eine eigentlich monoton fallende Funktion und es ist $\lim_{x \to \infty} y_0(x) = -\infty$. Es gilt also:

Steht in der ersten Ungleichung (1.10) *das Gleichheitszeichen, so sind die Randwertaufgaben* (a) *und* (a_1) *genau dann lösbar — und zwar eindeutig lösbar —, wenn zwischen* ξ_2 *und* c_2 *die Beziehung*

$$c_2 = \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} y_0(\xi_2)}$$

gilt. Steht in der zweiten Ungleichung (1.10) *das Gleichheitszeichen, so sind die Randwertaufgaben* (b) *und* (b_1) *genau dann lösbar — und zwar eindeutig lösbar —, wenn zwischen* c_2, c_3 *und* $\xi_2, \xi_3 > \xi_1$ *die Beziehungen*

$$c_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu y_0(\xi_\mu)} \quad \text{für} \quad \mu = 2, 3$$

gelten.

Für die weiteren Untersuchungen nehmen wir daher an, daß in (1.10) die Ungleichheitszeichen gelten.

§ 2. Hilfsfunktionen

1. Bei der Untersuchung der beiden Randwertaufgaben (a_1) und (b_1) benötigen wir mehrmals Eigenschaften verschiedener Funktionen. Diese sollen der Übersichtlichkeit halber in diesem Paragraphen hergeleitet und zusammengestellt werden.

Es sei v eine reelle Variable mit $-\infty < v \leqq 0$. Der Differentiationsstrich bezeichne bei allen auftretenden Funktionen die Ableitung nach v. $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sei ein Vektor mit $\eta_\nu \geqq 0$ und mindestens einem $\eta_\nu > 0$. $\mathfrak{M} = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{N} = \{1, \ldots, n\}$ mit $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_m$ und $\vec{\eta}_{\mathfrak{M}} = (\eta_{\mathfrak{M},1}, \ldots, \eta_{\mathfrak{M},n})$ der aus $\vec{\eta}$ entstehende Vektor, wenn

$$\eta_{\mathfrak{M},\nu} = \begin{cases} \eta_\nu & \text{für} \quad \nu \in \mathfrak{M} \\ 0 & \text{für} \quad \nu \notin \mathfrak{M} \end{cases}$$

gesetzt wird. Wir betrachten nur solche Teilmengen $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}$, für die $\vec{\eta}_{\mathfrak{M}}$ nicht der Nullvektor ist, d.h. für die mindestens ein $\eta_{\mathfrak{M},\nu} > 0$ ist. Ferner bezeichnen ϱ, σ, τ wie bisher drei verschiedenen Zahlen von $\mathfrak{N}$, mit $\varrho < \sigma < \tau$, für die wir in diesem Paragraphen noch

$$K_\varrho > K_\sigma > K_\tau \tag{2.1}$$

voraussetzen.

2. Zunächst untersuchen wir die Funktionen

$$g_1(v, \varrho, \sigma, \tau) = \begin{cases} \dfrac{e^{K_\varrho v} - e^{K_\tau v}}{e^{K_\sigma v} - e^{K_\tau v}} & \text{für} \quad -\infty < v < 0 \\ \dfrac{K_\varrho - K_\tau}{K_\sigma - K_\tau} & \text{für} \quad v = 0 \end{cases}$$

und

$$g_2(v, \varrho, \sigma, \tau) = e^{(K_\sigma - K_\varrho)v} g_1(v, \varrho, \sigma, \tau).$$

Nach (2.1) ist für $-\infty < v < 0$ stets

$$e^{K_\varrho v} - e^{K_\sigma v} < 0, \quad e^{K_\varrho v} - e^{K_\tau v} < 0, \quad e^{K_\sigma v} - e^{K_\tau v} < 0, \tag{2.2}$$

so daß $g_1(v, \varrho, \sigma, \tau)$ und $g_2(v, \varrho, \sigma, \tau)$ für $-\infty < v \leqq 0$ positiv sind. Ferner ist

$$\lim_{v \to 0-} g_1(v, \varrho, \sigma, \tau) = g_1(0, \varrho, \sigma, \tau) = g_2(0, \varrho, \sigma, \tau).$$

Für $-\infty<v<0$ ergibt sich mit $K_\varrho-K_\tau=\alpha$, $K_\sigma-K_\tau=\beta$

$$g_1(v,\varrho,\sigma,\tau)=\frac{e^{\alpha v}-1}{e^{\beta v}-1}, \qquad g_2(v,\varrho,\sigma,\tau)=\frac{1-e^{-\alpha v}}{1-e^{-\beta v}}$$

und daher

$$\begin{aligned}(e^{\beta v}-1)^2 g_1'(v,\varrho,\sigma,\tau) &= -\alpha e^{\alpha v}(1-e^{\beta v})+\beta e^{\beta v}(1-e^{\alpha v})\\ &= \alpha\beta e^{(\alpha+\beta)v}\left(\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta v})-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha v})\right)\\ &= \alpha\beta e^{(\alpha+\beta)v}\int_0^v (e^{-\beta u}-e^{-\alpha u})\,du\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(1-e^{-\beta v})^2 g_2'(v,\varrho,\sigma,\tau) &= \alpha e^{-\alpha v}(1-e^{-\beta v})-\beta e^{-\beta v}(1-e^{-\alpha v})\\ &= \alpha\beta e^{-(\alpha+\beta)v}\int_0^v (e^{\beta u}-e^{\alpha u})\,du.\end{aligned}$$

Wegen (2.1) ist $\alpha>\beta>0$ und daher nach (2.2) für $v<0$

$$g_1'(v,\varrho,\sigma,\tau)>0, \qquad g_2'(v,\varrho,\sigma,\tau)<0, \tag{2.3}$$

d.h. *in* $-\infty<v\leqq 0$ *ist* g_1 *eine eigentlich monoton wachsende,* g_2 *eine eigentlich monoton fallende Funktion von* v.

3. Für jede der in **1.** eingeführten Mengen $\mathfrak{M}\subseteqq\mathfrak{N}$ definieren wir die Funktionen

$$h(v,\vec{\eta}_{\mathfrak{M}})=h_{\mathfrak{M}}(v)=C+\sum_{\nu=1}^{n}\eta_{\mathfrak{M},\nu}e^{K_\nu v}=C+\sum_{\lambda=1}^{m}\eta_{\nu_\lambda}e^{K_{\nu_\lambda}v}, \qquad C\geqq 0. \tag{2.4}$$

Da nach unseren allgemeinen Vorbemerkungen in **1.** $\eta_{\mathfrak{M},\nu}\geqq 0$ und mindestens ein $\eta_{\mathfrak{M},\nu}>0$ ist, erhalten wir für $v\leqq 0$

$$\begin{cases}0<h_{\mathfrak{M}}(v)\leqq h_{\mathfrak{N}}(v)\\ 0<h_{\mathfrak{M}}'(v)\leqq h_{\mathfrak{N}}'(v)\\ 0<h_{\mathfrak{M}}''(v)\leqq h_{\mathfrak{N}}''(v),\end{cases} \tag{2.5}$$

so daß auch die Funktionen

$$H_{\mathfrak{M}}(v,\varrho,\sigma)=\frac{e^{K_\varrho v}-e^{K_\sigma v}}{h_{\mathfrak{M}}'(v)} \tag{2.6}$$

für alle $v\leqq 0$ definiert und differenzierbar sind. Setzen wir

$$v_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{K_\varrho-K_\sigma}\log\dfrac{K_\sigma}{K_\varrho} & \text{für } K_\sigma>K_{\nu_m}\\ -\infty & \text{für } K_\sigma\leqq K_{\nu_m},\end{cases} \tag{2.7}$$

so gilt

Hilfssatz 1. *Für* $v_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)<v\leqq 0$ *ist* $H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma)>0$. *Ist dabei* $K_\sigma>K_{\nu_m}$, *also* $v_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)>-\infty$, *so ist* $H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma)$ *auch für* $v=v_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)$ *positiv, kann aber für hinreichend kleine* v *negativ werden.*

Beweis. Da

$$(2.8)\quad \begin{cases} h_{\mathfrak{M}}'^2(v)\, H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma) = (K_\varrho e^{K_\varrho v} - K_\sigma e^{K_\sigma v})\, h_{\mathfrak{M}}'(v) - (e^{K_\varrho v} - e^{K_\sigma v})\, h_{\mathfrak{M}}''(v) \\ \qquad = \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} K_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} v} \{(K_\varrho - K_{\nu_\lambda})\, e^{K_\varrho v} - (K_\sigma - K_{\nu_\lambda})\, e^{K_\sigma v}\} \end{cases}$$

ist, ist wegen (2.2) und (2.5) sicher $H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma) > 0$ für $(K_\varrho e^{K_\varrho v} - K_\sigma e^{K_\sigma v}) \geqq 0$, d.h. für $v \geqq \frac{1}{K_\varrho - K_\sigma} \log \frac{K_\sigma}{K_\varrho}$; ist nun $K_\sigma \leqq K_{\nu_m}$, so folgt nach **1.** und (1.9) $K_\sigma - K_{\nu_\lambda} \leqq 0$ für $\lambda = 1, \ldots, m$, nach (2.2) also

$$h_{\mathfrak{M}}'^2(v)\, H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma) \geqq \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} K_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} v} (K_\varrho - K_\sigma)\, e^{K_\varrho v} > 0 \quad \text{für} \quad 0 \geqq v > -\infty.$$

Daß für $v_{\mathfrak{M}} > -\infty$ $H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma)$ negativ werden kann, sieht man so: Ist in diesem Fall $\eta_{\nu_m} > 0$ und $K_{\nu_1} > K_{\nu_2} > \cdots > K_{\nu_m}$, so existiert folgender Grenzwert und ist nach (2.8) gleich

$$\lim_{v \to -\infty} h_{\mathfrak{M}}'^2(v)\, H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma)\, e^{-(K_\sigma + K_{\nu_m})v} = -(K_\sigma - K_{\nu_m}) K_{\nu_m} \eta_{\nu_m} < 0.$$

In einem Intervall $-\infty < v < v_1$ ist daher $H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma) < 0$.

4. Die Funktion

$$g_3(v) = \frac{K_\varrho^2 - K_\tau^2}{K_\sigma^2 - K_\tau^2} - g_2(v,\varrho,\sigma,\tau)$$

ist nach (2.3) für $-\infty < v \leqq 0$ eine im strengen Sinn monoton wachsende Funktion. Da $g_3(0) = g_2(0,\varrho,\sigma,\tau) \left\{ \frac{K_\varrho + K_\tau}{K_\sigma + K_\tau} - 1 \right\} > 0$ und $\lim_{v \to -\infty} g_3(v) = -\infty$ ist, besitzt $g_3(v)$ in $(-\infty, 0)$ genau eine Nullstelle $w = w(\varrho,\sigma,\tau)$. Wir wollen zeigen, daß mit

$$(2.9)\qquad v(\varrho,\sigma,\tau) = \frac{1}{K_\varrho - K_\sigma} \log \frac{K_\sigma}{K_\varrho}$$

die Abschätzung $w(\varrho,\sigma,\tau) < v(\varrho,\sigma,\tau)$[4]) gilt, daß also für $v(\varrho,\sigma,\tau) \leqq v \leqq 0$

$$(2.10)\qquad 0 < g_3\big(v(\varrho,\sigma,\tau)\big) \leqq g_3(v)$$

ist. Da nach (2.9)

$$e^{-K_\sigma v(\varrho,\sigma,\tau)} = \frac{K_\sigma}{K_\varrho} e^{-K_\varrho v(\varrho,\sigma,\tau)}$$

gilt, ist der linke Teil der Doppelungleichung (2.10) nach der Definition von g_2 und g_3 gleichwertig mit jeder der drei folgenden Ungleichungen

$$(K_\varrho^2 - K_\tau^2)\,(1 - e^{(K_\tau - K_\sigma) v(\varrho,\sigma,\tau)}) - (K_\sigma^2 - K_\tau^2)\,(1 - e^{(K_\tau - K_\varrho) v(\varrho,\sigma,\tau)}) < 0,$$

$$(K_\varrho^2 - K_\sigma^2) + e^{(K_\tau - K_\varrho) v(\varrho,\sigma,\tau)} \left(-K_\tau^2 + K_\sigma^2 - \frac{K_\sigma}{K_\varrho} (K_\varrho^2 - K_\tau^2) \right) < 0,$$

$$(K_\varrho - K_\tau) \log \frac{K_\sigma}{K_\varrho} - (K_\varrho - K_\sigma) \log \frac{K_\varrho K_\sigma + K_\tau^2}{K_\varrho^2 + K_\varrho K_\sigma} < 0.$$

[4]) Es gilt aber nicht immer $w(\varrho,\sigma,\tau) < \frac{1}{K_\varrho - K_\tau} \log \frac{K_\tau}{K_\varrho}$, wie die Beispiele a) $K_\varrho = 1$, $K_\sigma = \frac{1}{2}$, $K_\tau = \frac{1}{4}$ und b) $K_\varrho = 1$, $K_\sigma = \frac{1}{5}$, $K_\tau = \frac{1}{10}$ zeigen.

Setzen wir zur Abkürzung $K_\varrho = a$, $K_\tau = b$, $K_\sigma = x$ und betrachten wir dann die linke Seite der letzten Ungleichung als Funktion $G(x)$ in $\langle b, a\rangle$, so erhalten wir

a) $G(b) = G(a) = 0$,

b) $$\frac{d^2G}{dx^2} = (a-b)\left\{-\frac{1}{x^2} + \frac{2(a+b)}{(ax+b^2)(x+a)} + \frac{(a-x)(a+b)(a^2+2ax+b^2)}{(ax+b^2)^2(x+a)^2}\right\}$$

$$\geqq (a-b)\left\{-\frac{1}{x^2} + \frac{2(a+b)}{(ax+b^2)(a+x)} + \frac{(a-x)(a+b)}{x(ax+b^2)(a+x)}\right\}$$

$$= (a-b)\left\{-\frac{1}{x^2} + \frac{a+b}{x(ax+b^2)}\right\} > 0 \quad \text{für} \quad x > b.$$

$\frac{dG}{dx}$ ist also eine in $\langle b, a\rangle$ eigentlich monoton wachsende Funktion und hat in $\langle b, a\rangle$ höchstens eine, nach dem Satz von ROLLE daher in (b, a) genau eine Nullstelle v_0. In $\langle b, v_0\rangle$ ist deshalb $G(x)$ monoton fallend, in $\langle v_0, a\rangle$ monoton wachsend, insbesondere ist also wegen (2.1) $G(K_\sigma) < 0$.

Für die in (2.7) und (2.9) definierten Zahlen erhalten wir nun

$$v_{\mathfrak{M}}(\sigma, \tau) \leqq v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \tau) \leqq v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) \leqq v(\varrho, \sigma, \tau). \tag{2.11}$$

Für $K_\tau \leqq K_{\nu_m}$, also $v_{\mathfrak{M}}(\sigma, \tau) = v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \tau) = -\infty$ ist dies klar, da in diesem Fall auch $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) \geqq -\infty$ ist. Ist aber $K_\tau > K_{\nu_m}$, so erhalten wir aus

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y-x}\log\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{(y-x)^2}\left(\log\left(1+\frac{y-x}{x}\right) - \frac{y-x}{x}\right) < 0 \quad \text{für} \quad y > x$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y-x}\log\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{(y-x)^2}\left(\log\left(1+\frac{x-y}{y}\right) - \frac{x-y}{y}\right) < 0 \quad \text{für} \quad y > x$$

bei Beachtung von (2.1)

$$\frac{1}{K_\sigma - K_\tau}\log\frac{K_\tau}{K_\sigma} < \frac{1}{K_\varrho - K_\tau}\log\frac{K_\tau}{K_\varrho} < \frac{1}{K_\varrho - K_\sigma}\log\frac{K_\sigma}{K_\varrho},$$

also (2.11) unter Ausschluß des Gleichheitszeichens.

Nach Hilfssatz 1 ist die Funktion $\frac{H'_{\mathfrak{N}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{N}}(v, \sigma, \tau)}$ für $v_{\mathfrak{N}}(\sigma, \tau) < v \leqq 0$ definiert. Wir beweisen

Hilfssatz 2. *Für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq v \leqq 0$ ist $\frac{H'_{\mathfrak{N}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{N}}(v, \sigma, \tau)}$ eine eigentlich monoton wachsende Funktion.*

Beweis. Nach (2.8) ist

$$\frac{H'_{\mathfrak{N}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{N}}(v, \sigma, \tau)} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu K_\nu e^{K_\nu v}\left((K_\varrho - K_\nu)e^{K_\varrho v} - (K_\tau - K_\nu)e^{K_\tau v}\right)}{\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu K_\nu e^{K_\nu v}\left((K_\sigma - K_\nu)e^{K_\sigma v} - (K_\tau - K_\nu)e^{K_\tau v}\right)}.$$

Setzen wir zur Abkürzung den nach Hilfssatz 1 und (2.11) für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq v \leqq 0$ positiven Nenner $= N(v)$, so erhalten wir nach Umordnung der Summanden

$$N^2(v)\,\frac{d}{dv}\left(\frac{H'_{\mathfrak{N}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{N}}(v, \sigma, \tau)}\right) = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\lambda \eta_\nu K_\lambda K_\nu e^{(K_\lambda + K_\nu)v} L_{\lambda\nu}(v)$$

mit

$$L_{\lambda\nu}(v) = \{(K_\varrho^2 - K_\lambda^2)\, e^{K_\varrho v} - (K_\tau^2 - K_\lambda^2)\, e^{K_\tau v}\}\{(K_\sigma - K_\nu)\, e^{K_\sigma v} - (K_\tau - K_\nu)\, e^{K_\tau v}\} -$$
$$- \{(K_\sigma^2 - K_\lambda^2)\, e^{K_\sigma v} - (K_\tau^2 - K_\lambda^2)\, e^{K_\tau v}\}\{(K_\varrho - K_\nu)\, e^{K_\varrho v} - (K_\tau - K_\nu)\, e^{K_\tau v}\}$$
$$= -(e^{K_\sigma v} - e^{K_\tau v})\, g_1'(v, \varrho, \sigma, \tau)\{(K_\sigma^2 e^{K_\sigma v} - K_\tau^2 e^{K_\tau v}) - K_\lambda^2 (e^{K_\sigma v} - e^{K_\tau v})\} +$$
$$+ (K_\sigma^2 - K_\tau^2)\, e^{K_\varrho v}\, g_3(v)\{(K_\sigma - K_\nu)\, e^{K_\sigma v} - (K_\tau - K_\nu)\, e^{K_\tau v}\}.$$

Wegen

$$(K_\sigma^2 e^{K_\sigma v} - K_\tau^2 e^{K_\tau v}) \geqq K_\tau (K_\sigma e^{K_\sigma v} - K_\tau e^{K_\tau v})$$

ist hier nach (2.1), (2.2), (2.3), (2.10), (2.11) $L_{\lambda\nu}(v)$ und damit auch $\frac{d}{dv}\left(\frac{H_{\mathfrak{R}}'(v, \varrho, \tau)}{H_{\mathfrak{R}}'(v, \sigma, \tau)}\right)$ für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq v \leqq 0$ positiv.

5. Mit Hilfe der bisher hergeleiteten Formeln und Sätze läßt sich nun leicht zeigen:

Hilfssatz 3. *Für* $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) < v < 0$ *ist*

$$H_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \sigma) + h_{\mathfrak{N}}(v) \int_0^v \frac{e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u}}{h_{\mathfrak{N}}^2(u)}\, du < 0 \tag{2.12}$$

und für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq v < 0$ *existiert*

$$M(v, \varrho, \sigma, \tau) = \frac{\int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-1}(u)\, H_{\mathfrak{N}}'(u, \sigma, \tau)\, du}{\int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-1}(u)\, H_{\mathfrak{N}}'(u, \varrho, \tau)\, du} \tag{2.13}$$

und ist eine eigentlich monoton fallende Funktion. Für $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) > -\infty$ *gil* (2.12) *auch für* $v = v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma)$, *aber nicht in allen Fällen für alle* $v > -\infty$. *Ebenso ist* $M(v, \varrho, \sigma, \tau)$ *nicht stets für alle* $v < 0$ *eine monoton fallende Funktion.*

Beweis. a) Wegen $v < 0$ ist nach (2.2), (2.5), (2.6) und Hilfssatz 1 für $v > v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma)$

$$H_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \sigma) + h_{\mathfrak{N}}(v) \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-2}(u)\,(e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u})\, du$$
$$\leqq H_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \sigma) + h_{\mathfrak{N}}(v) \int_0^v \frac{h_{\mathfrak{N}}'(u)}{h_{\mathfrak{N}}^2(u)}\, H_{\mathfrak{M}}(u, \varrho, \sigma)\, du$$
$$= h_{\mathfrak{N}}(v) \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-1}(u)\, H_{\mathfrak{M}}'(u, \varrho, \sigma)\, du < 0,$$

und für $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) > -\infty$ gilt dies offensichtlich auch für $v = v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma)$.

b) Bezeichnen wir den nach Hilfssatz 1 für $v > v_{\mathfrak{N}}(\varrho, \tau)$ negativen Nenner von $M(v, \varrho, \sigma, \tau)$ kurz mit $N^*(v)$, so ergibt sich

$$h_{\mathfrak{N}}(v)\, N^{*2}(v)\, M'(v, \varrho, \sigma, \tau)$$
$$= \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-1}(u)\{H_{\mathfrak{N}}'(v, \sigma, \tau)\, H_{\mathfrak{N}}'(u, \varrho, \tau) - H_{\mathfrak{N}}'(v, \varrho, \tau)\, H_{\mathfrak{N}}'(u, \sigma, \tau)\}\, du.$$

Da die geschweifte Klammer nach Hilfssatz 2 für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq u < 0$ stets positiv ist, ist in diesem Intervall $M'(v, \varrho, \sigma, \tau) < 0$, also $M(v, \varrho, \sigma, \tau)$ eine eigentlich monoton fallende Funktion.

c) Für $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) > -\infty$ folgt nach (2.7) $K_\sigma > K_{\nu_m}$. Ist nun weiter $\eta_{\nu_m} > 0$ und $C > 0$, so ergibt sich

$$\lim_{v \to -\infty} H_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \sigma) = \lim_{v \to -\infty} \frac{e^{(K_\varrho - K_{\nu_m})v} - e^{(K_\sigma - K_{\nu_m})v}}{\sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} K_{\nu_\lambda} e^{(K_{\nu_\lambda} - K_{\nu_m})v}} = 0,$$

während der zweite Summand in (2.12) für $v \to -\infty$ gegen den positiven Wert

$$C \int_0^{-\infty} \frac{e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u}}{h_{\mathfrak{N}}^2(u)}\, du$$

konvergiert[5]). Es gibt also ein Intervall, in dem die linke Seite von (2.12) ständig positiv bleibt.

d) Um den letzten Teil von Hilfssatz 3 zu begründen setzen wir $n \geqq 4$, $K_\tau = K_n < K_{n-1} < \cdots < K_1$, $K_{n-1} < K_\sigma < K_\varrho$, $C > 0$ und $\eta_{n-1}, \eta_n > 0$ voraus. Dann streben nach (2.8) für $\mu = \varrho, \sigma$ und $v \to -\infty$

$$h_{\mathfrak{N}}'^2(v)\, H_{\mathfrak{N}}'(v, \mu, n)\, e^{-(K_n + K_{n-1})v} \quad \text{gegen} \quad -\eta_{n-1} K_{n-1}(K_n - K_{n-1})$$

und

$$H_{\mathfrak{N}}(v, \mu, n) \quad \text{gegen} \quad -(\eta_n K_n)^{-1}.$$

Daher folgt aus

$$\begin{aligned} h_{\mathfrak{N}}(v)\, N^{*2}(v)\, M'(v, \varrho, \sigma, n) = h_{\mathfrak{N}}^{-1}(v) \big(& H_{\mathfrak{N}}'(v, \sigma, n)\, H_{\mathfrak{N}}(v, \varrho, n) - \\ & - H_{\mathfrak{N}}'(v, \varrho, n)\, H_{\mathfrak{N}}(v, \sigma, n) \big) + \\ & + H_{\mathfrak{N}}'(v, \sigma, n) \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-2}(u) \left(e^{K_\varrho u} - e^{K_n u}\right) du - \\ & - H_{\mathfrak{N}}'(v, \varrho, n) \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-2}(u) \left(e^{K_\sigma u} - e^{K_n u}\right) du, \end{aligned}$$

da alle uneigentlichen Integrale existieren[6]), daß

$$\begin{aligned} \lim_{v \to -\infty} h_{\mathfrak{N}}^2(v)\, h_{\mathfrak{N}}'^2(v)\, N^{*2}(v)\, M'(v, \varrho, \sigma, n)\, e^{-(K_{n-1} + K_n)v} \\ = -C \eta_{n-1} K_{n-1}(K_n - K_{n-1}) \int_0^{-\infty} h_{\mathfrak{N}}^{-2}(u) \left(e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u}\right) du > 0. \end{aligned}$$

Nach unseren Voraussetzungen, (2.7) und Hilfssatz 1 sind für $-\infty < v < 0$ alle drei Funktionen $h_{\mathfrak{N}}(v)$, $h_{\mathfrak{N}}'(v)$ und $N^*(v)$ von Null verschieden. Es gibt also ein Intervall $-\infty < v < v_2$, in dem $M'(v, \varrho, \sigma, n) > 0$, d.h. $M(v, \varrho, \sigma, n)$ monoton wachsend ist.

---

[5]) Das uneigentliche Integral existiert, weil der Integrand für $u < 0$ negativ, das Integral also für $v < 0$ eine monotone Funktion ist und für $v < 0$ gilt

$$0 < \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-2}(u) \left(e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u}\right) du < C^{-2}(K_\sigma^{-1} - K_\varrho^{-1}).$$

[6]) Dies ergibt sich wie in Fußnote 5.

§ 3. Lösung der Randwertaufgabe (*a*)

1. Für die Randwertaufgabe (a_1) sind die η_ν für $\nu = 1, \ldots, n$, $\nu \neq \varrho, \sigma$ positive Konstanten und nach den ersten Randbedingungen ist mit

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} = \tilde{c}_1, \qquad c_1 - \tilde{c}_1 = c_1^*$$

$$\eta_\sigma = c_1^* - \eta_\varrho, \qquad 0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^* \tag{3.1}$$

zu wählen. Dabei ist zu beachten, daß nach Voraussetzung die ν_λ untereinander verschieden sind und $\nu_\lambda \neq \varrho, \sigma$ ist. Setzen wir

$$f(y, \eta_\varrho) = C + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varrho, \sigma}}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu y} + \eta_\varrho (e^{K_\varrho y} - e^{K_\sigma y}) + c_1^* e^{K_\sigma y},$$

so lautet die Differentialgleichung (1.7)

$$y' = -k_1 f(y, \eta_\varrho). \tag{3.2}$$

Die Aufgabe (a_1) lautet nun: *Läßt sich η_ϱ in $\langle 0, c_1^* \rangle$ so wählen, daß das Integral $y(x)$ durch den Punkt $(\xi_1, 0)$ von* (3.2) *die Bedingung*

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} y(\xi_2)} + \eta_\varrho (e^{K_\varrho y(\xi_2)} - e^{K_\sigma y(\xi_2)}) + c_1^* e^{K_\sigma y(\xi_2)} = c_2 \tag{3.3}$$

erfüllt? Nach § 1, **4.** können wir dabei $c_1^* > 0$ voraussetzen.

2. Ist $K_\varrho = K_\sigma$, so hängt f und damit die rechte Seite von (3.2) nicht von η_ϱ ab. Das Integral $y_0(x)$ mit $y_0(\xi_1) = 0$ ist dann allein durch c_1^* eindeutig bestimmt und wir erhalten

Satz 1. *Ist $K_\varrho = K_\sigma$ und genügt das durch den Punkt $(\xi_1, 0)$ gehende Integral $y_0(x)$ von* (3.2) *der Bedingung* (3.3), *so gibt es unendlich viele Lösungen der Randwertaufgabe (a); und zwar sind für jedes a mit $0 \leqq a \leqq 1$*

$$y_\nu(x) = \eta_\nu e^{K_\nu y_0(x)}, \qquad \nu = 1, \ldots, n \quad \text{mit} \quad \eta_\varrho = a c_1^*, \quad \eta_\sigma = (1 - a) c_1^*$$

Lösungen. Ist für $y_0(x)$ (3.3) *nicht erfüllt, so gibt es keine Lösung der Randwertaufgabe.*

3. Neben $c_1^* > 0$ können wir daher bei den folgenden Überlegungen $K_\varrho > K_\sigma$ voraussetzen. Für $0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^*$ ist $f(y, \eta_\varrho)$ für alle y positiv. Daher existiert

$$F(x, y, \eta_\varrho) = k_1 (x - \xi_1) + \int_0^y f^{-1}(u, \eta_\varrho)\, du \tag{3.4}$$

für alle x, y, η_ϱ aus dem Bereich $\xi_1 \leqq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^*$. Bezeichnen wir das durch den Punkt $(\xi_1, 0)$ gehende Integral von (3.2) mit $\varphi(x, \eta_\varrho)$, so ist $\varphi(x, \eta_\varrho)$ die durch Auflösen der Gleichung $F(x, y, \eta_\varrho) = 0$ für $x \geqq \xi_1$ eindeutig bestimmte Funktion, und es ist $\lim_{x \to \infty} \varphi(x, \eta_\varrho) = -\infty$. Auf

Grund der Differentialgleichung ist ferner $\varphi(x, \eta_\varrho)$ eine im engeren Sinn monoton fallende Funktion von x; also ist $\varphi(x, \eta_\varrho) < \varphi(\xi_1, \eta_\varrho) = 0$ für $x > \xi_1$. Ferner ist nach bekannten Sätzen über implizite Funktionen φ eine stetig differenzierbare Funktion von η_ϱ und es ist

$$\varphi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho) = f(\varphi(x, \eta_\varrho), \eta_\varrho) \int_0^{\varphi(x, \eta_\varrho)} \frac{e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u}}{f^2(u, \eta_\varrho)}\, du. \tag{3.5}$$

Für $x > \xi_1$ ist daher wegen $K_\varrho > K_\sigma$ und $\varphi(x, \eta_\varrho) < 0$

$$\varphi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho) > 0. \tag{3.6}$$

Eine Abschätzung von φ erhalten wir auf Grund folgender Überlegung: Setzen wir $d = C + \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu$, so ist $f(0, \eta_\varrho) = d$ und $f(y, \eta_\varrho) < d$ für $y < 0$. Daher folgt aus

$$-k_1(x - \xi_1) = \int_0^{-k_1(x-\xi_1)\, d} d^{-1}\, du = \int_0^{\varphi(x, \eta_\varrho)} f^{-1}(u, \eta_\varrho)\, du$$

und (3.6)

$$-k_1(x - \xi_1)\, d \leqq \varphi(x, 0) \leqq \varphi(x, \eta_\varrho) \leqq \varphi(x, c_1^*) < 0 \quad \text{für} \quad x > \xi_1. \tag{3.7}$$

4. Zur Lösung der Randwertaufgabe betrachten wir nun die mit den gegebenen Zahlen ν_λ gebildete Funktion

$$\psi(x, \eta_\varrho) = \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} \varphi(x, \eta_\varrho)} + \eta_\varrho \left(e^{K_\varrho \varphi(x, \eta_\varrho)} - e^{K_\sigma \varphi(x, \eta_\varrho)}\right) + c_1^*\, e^{K_\sigma \varphi(x, \eta_\varrho)}.$$

Nach **3.** ist $\psi(x, \eta_\varrho)$ für $\xi_1 \leqq x < \infty$, $0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^*$ eine stetig differenzierbare Funktion beider Variablen. Mit

$$\begin{cases} z_1 = z_1(\xi_2) = \operatorname{Min}\{\psi(\xi_2, \eta_\varrho) \mid 0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^*\}, \\ z_2 = z_2(\xi_2) = \operatorname{Max}\{\psi(\xi_2, \eta_\varrho) \mid 0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^*\} \end{cases} \tag{3.8}$$

ergibt sich daher sofort

Satz 2. *Für jedes $\xi_2 > \xi_1$ und jedes c_2 aus dem Intervall $I = \langle z_1, z_2 \rangle$ gibt es mindestens ein η_ϱ aus dem Intervall $\langle 0, c_1^* \rangle$, so daß* (3.3) *erfüllt ist. Liegt c_2 nicht in I, so läßt sich* (3.3) *nicht erfüllen.* Mit anderen Worten: *Genau für die c_2 aus I gibt es mindestens eine Lösung der Randwertaufgaben* (*a*) *und* (a_1).

Setzen wir für die in (3.3) auftretenden Indices ν_λ — man beachte dabei § 2, **1.** und § 3, **1.** — $\mathfrak{M} = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ und

$$x_{\mathfrak{M}} = x_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) = \begin{cases} \xi_1 + \dfrac{1}{d(k_\varrho - k_\sigma)} \log \dfrac{k_\varrho}{k_\sigma} & \text{für} \quad k_\sigma > k_{\nu_m} \\ \infty & \text{für} \quad k_\sigma \leqq k_{\nu_m}, \end{cases} \tag{3.9}$$

so läßt sich über Satz 2 hinaus zeigen:

Satz 3. *Ist* $\xi_1<\xi_2<x_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)$ *(im Fall* $x_{\mathfrak{M}}<\infty$ *kann auch* $\xi_2=x_{\mathfrak{M}}$ *zugelassen werden), so gibt es zu jedem* c_2 *mit*

$$\psi(\xi_2, c_1^*) \leqq c_2 \leqq \psi(\xi_2, 0) \tag{3.10}$$

genau ein $\eta_\varrho=\eta_\varrho(c_2)$ *mit* $0\leqq\eta_\varrho\leqq c_1^*$, *so daß* $\varphi\left(x,\eta_\varrho(c_2)\right)$ *die Beziehung* (3.3) *erfüllt ist, d.h. unter den angegebenen Einschränkungen gibt es genau ein Integral von* (1.7), *das die Randbedingungen* (a_1) *erfüllt, und nach* § 1 *dann auch genau ein Integral von* (1.3), *das den Randbedingungen* (a) *genügt. Liegt* c_2 *nicht im Intervall* (3.10), *so gibt es keine Lösung der Randwertaufgaben.*

Beweis. Mit $\varphi=\varphi(x,\eta_\varrho)$ ergibt sich

$$\psi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho)=\left\{\sum_{\lambda=1}^{m}\eta_{\nu_\lambda}K_{\nu_\lambda}e^{K_{\nu_\lambda}\varphi}+\eta_\varrho\left(K_\varrho e^{K_\varrho\varphi}-K_\sigma e^{K_\sigma\varphi}\right)+c_1^*K_\sigma e^{K_\sigma\varphi}\right\}\varphi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho)+$$
$$+\left(e^{K_\varrho\varphi}-e^{K_\sigma\varphi}\right).$$

Ordnen wir $\mathfrak{M}^*=\mathfrak{M}\cup\{\varrho,\sigma\}=\{\nu_1,\ldots,\nu_m,\varrho,\sigma\}$ der Größe der Elemente nach, so ist wegen $c_1^*>0$ $\mathfrak{M}^*$ eine der in § 2 behandelten Mengen. Mit den dort eingeführten Bezeichnungen und $\eta_\sigma=c_1^*-\eta_\varrho$ ist dann

$$\psi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho)=h'_{\mathfrak{M}^*}(\varphi)\left\{H_{\mathfrak{M}^*}(\varphi,\varrho,\sigma)+h_{\mathfrak{N}}(\varphi)\int_0^{\varphi}\frac{e^{K_\varrho u}-e^{K_\sigma u}}{h^2_{\mathfrak{N}}(u)}\,du\right\},\quad \varphi=\varphi(x,\eta_\varrho).$$

Nach (2.5) und Hilfssatz 3 ist daher wegen $\varphi(x,\eta_\varrho)<0$ für $x>\xi_1$

$$\psi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho)<0 \quad \text{für} \quad v_{\mathfrak{M}^*}<\varphi(x,\eta_\varrho)<0. \tag{3.11}$$

Die Bedingung $v_{\mathfrak{M}^*}<\varphi(x,\eta_\varrho)$ ist nun nach (1.5), (2.7), (3.7), (3.9) und der Definition von $\mathfrak{M}^*$ erfüllt, sobald $\xi_1\leqq x<x_{\mathfrak{M}}$ ist. Aus (3.11) folgt dann zusammen mit Satz 2 die Behauptung.

Ist $x_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)<\infty$, so ergibt sich aus (3.11), daß das angegebene Intervall für ξ_2 unter Umständen verbessert werden kann. Der Zusatz zu (2.12) in Hilfssatz 3 zeigt hingegen, daß in diesem Fall Satz 3 für genügend großes $\xi_2>x_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)>\xi_1$ falsch werden kann.

§ 4. Lösung der Interpolationsaufgabe (b)

1. Hier sind jetzt die η_ν für $\nu\neq\varrho,\sigma,\tau$ positive Konstanten und für jede Lösung der Aufgabe (b) muß mit $d_1=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varrho,\sigma,\tau}}^{n}\eta_\nu$, und $d_1^*=c_1-d_1$

$$\eta_\tau=d_1^*-(\eta_\varrho+\eta_\sigma);\qquad 0\leqq\eta_\varrho,\ \eta_\sigma\leqq d_1^*,\qquad 0\leqq\eta_\varrho+\eta_\sigma\leqq d_1^* \tag{4.1}$$

gelten. Die rechte Seite der Differentialgleichung (1.7) ist daher eine Funktion von y, η_ϱ und η_σ; setzen wir

$$f^*(y,\eta_\varrho,\eta_\sigma)=C+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varrho,\sigma,\tau}}^{n}\eta_\nu e^{K_\nu y}+\eta_\varrho(e^{K_\varrho y}-e^{K_\tau y})+\eta_\sigma(e^{K_\sigma y}-e^{K_\tau y})+d_1^*e^{K_\tau y}, \tag{4.2}$$

so lautet sie

$$y' = -k_1 f^*(y, \eta_\varrho, \eta_\sigma). \tag{4.3}$$

Da wir nach § 1, **4.** $d_1^* > 0$ voraussetzen können, ist $f^*(y, \eta_\varrho, \eta_\sigma) > 0$ für alle y und für die dem dreieckigen Bereich

$$\mathfrak{B}\colon\ 0 \leqq \eta_\varrho, \eta_\sigma \leqq d_1^*, \qquad \eta_\varrho + \eta_\sigma \leqq d_1^* \tag{4.4}$$

zugehörigen $\eta_\varrho, \eta_\sigma$.

2. Zunächst behandeln wir den Sonderfall $K_\varrho = K_\sigma = K_\tau$. Hier hängt nach (4.2) f^* nicht von η_ϱ und η_σ ab. Das Integral $y_0(x)$ von (4.3) mit dem Anfangswert $y_0(\xi_1) = 0$ ist daher durch c_1 eindeutig bestimmt und wir erhalten

Satz 4. *Ist $K_\varrho = K_\sigma = K_\tau$, so ist die Interpolationsaufgabe (b) genau dann lösbar, wenn für $y_0(x)$ die Beziehungen*

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varrho,\, \sigma,\, \tau}}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu y_0(\xi_\mu)} + d_1^* e^{K_\varrho y_0(\xi_\mu)} = c_\mu, \qquad \mu = 2, 3$$

erfüllt sind. Ist (b) lösbar, so ist $y_\nu(x) = \eta_\nu e^{K_\nu y_0(x)}$, $\nu = 1, \ldots, n$ für jedes Tripel nichtnegativer Zahlen $\eta_\varrho, \eta_\sigma, \eta_\tau$ mit $\eta_\varrho + \eta_\sigma + \eta_\tau = d_1^*$ eine Lösung.

3. Im folgenden sei daher stets $K_\varrho \geqq K_\sigma > K_\tau$ oder $K_\varrho > K_\sigma \geqq K_\tau$. Bezeichnen wir das durch den Punkt $(\xi_1, 0)$ gehende Integral von (4.3) mit $\Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma)$, so wird Φ durch

$$\int_0^\Phi f^{*-1}(y, \eta_\varrho, \eta_\sigma)\, dy + k_1(x - \xi_1) = 0 \tag{4.5}$$

gegeben. Da der Integrand für alle $\eta_\varrho, \eta_\sigma$ aus $\mathfrak{B}$ positiv ist, ist Φ eine eigentlich monoton fallende Funktion von x, $\Phi(\xi_1, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} \Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = -\infty$. Aus der Definition von d_1^* und (4.4) folgt für $y < 0$ wie in § 3

$$f^*(y, \eta_\varrho, \eta_\sigma) < C + \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu = C + c_1 = d$$

und somit

$$-k_1 d(x - \xi_1) < \Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) < 0. \tag{4.6}$$

Ferner ist nach (4.5) Φ und daher auch

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varrho,\sigma,\tau}}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu \Phi} + \eta_\varrho (e^{K_\varrho \Phi} - e^{K_\tau \Phi}) + \eta_\sigma (e^{K_\sigma \Phi} - e^{K_\tau \Phi}) + d_1^* e^{K_\tau \Phi}, \\ \Phi = \Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \end{aligned} \right. \tag{4.7}$$

eine nach allen Variablen stetig differenzierbare Funktion, und zwar ergibt sich mit den in § 2 eingeführten Bezeichnungen und (4.5) — man beachte, daß wegen $d_1^* > 0$ die Ungleichungen (2.5) erfüllt sind — für $\mu = \varrho, \sigma$ und

$\Phi = \Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma)$

$$(4.8)\quad \begin{cases} \Phi_{\eta_\mu}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = h_{\mathfrak{R}}(\Phi) \int_0^{\Phi} h_{\mathfrak{R}}^{-2}(u)\,(e^{K_\mu u} - e^{K_\tau u})\,du \\ \Psi_{\eta_\mu}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = h'_{\mathfrak{R}}(\Phi)\{H_{\mathfrak{R}}(\Phi, \mu, \tau) + h_{\mathfrak{R}}(\Phi) \int_0^{\Phi} h_{\mathfrak{R}}^{-2}(u)\,(e^{K_\mu u} - e^{K_\tau u})\,du\}. \end{cases}$$

Wegen der Monotonie von Φ als Funktion von x ist daher nach (2.5), (2.6), Hilfssatz 3, (2.7) und (4.6)

$$(4.9)\quad \begin{cases} \Psi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) < 0 \quad \text{für} \quad \xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \tau) \\ \Psi_{\eta_\sigma}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \begin{cases} < 0 \quad \text{für} \quad K_\sigma > K_\tau \quad \text{und} \quad \xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\sigma, \tau) \\ \equiv 0 \quad \text{für} \quad K_\sigma = K_\tau \quad \text{und} \quad \xi_1 \leqq x < \infty. \end{cases} \end{cases}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt daher wegen (2.11) und (4.1) für $\xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \tau)$

$$\Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) \leqq \Psi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \leqq \Psi(x, 0, \eta_\sigma) \leqq \Psi(x, 0, 0).$$

Diese Ungleichungen können wir, da aus $\eta_\sigma = d_1^* - \eta_\varrho$ nach (4.1) $\eta_\tau = 0$ folgt, auf folgende Weise nach links fortsetzen: Ist $K_\varrho > K_\sigma$, so wird unter Heranziehung der in § 3 eingeführten Bezeichnungen

$$d_1^* = c_1^* \quad \text{und} \quad \Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) = \psi(x, \eta_\varrho).$$

Daher ist nach (3.11) und (3.9)

$$(4.10)\quad \Psi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) = \psi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho) < 0 \quad \text{für} \quad \xi_1 < x < x_{\mathfrak{R}}(\varrho, \sigma),$$

d.h.

$$\Psi(x, d_1^*, 0) \leqq \Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) \quad \text{für} \quad \xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \sigma).$$

Ist dagegen $K_\varrho = K_\sigma$, so hängt f^* nicht einzeln von η_ϱ und η_σ, sondern von der Summe $\eta_\varrho + \eta_\sigma$ ab. Da diese wegen $\eta_\sigma = d_1^* - \eta_\varrho$ konstant ist, folgt aus (4.2) und (4.5) $\Phi(x, d_1^*, 0) = \Phi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho)$ und daher nach (4.7) $\Psi(x, d_1^*, 0) = \Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho)$ für alle $x > \xi_1$.

Wir haben damit

$$(4.11)\quad \Psi(x, d_1^*, 0) \leqq \Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) \leqq \Psi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \leqq \Psi(x, 0, 0)$$

bewiesen. Dabei ist die linke dieser Ungleichungen für alle x mit

$$\xi_1 < x < \begin{cases} \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \sigma) & \text{für} \quad K_\varrho > K_\sigma \\ \infty & \text{für} \quad K_\varrho = K_\sigma \end{cases}$$

gültig, während die anderen für alle x mit

$$\xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \tau)$$

gelten. Setzen wir unter Beachtung der Definition von $v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \sigma)$ und $v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \tau)$ und den Ungleichungen (2.11)

$$(4.12)\quad x(\varrho,\sigma,\tau)=\begin{cases}\xi_1+\dfrac{1}{d(k_\varrho-k_\sigma)}\log\dfrac{k_\varrho}{k_\sigma}, & \text{falls } k_\varrho>k_\sigma \begin{cases}>k_\tau\geqq k_n\\ =k_\tau>k_n\end{cases}\\ \xi_1+\dfrac{1}{d(k_\varrho-k_\tau)}\log\dfrac{k_\varrho}{k_\tau}, & \text{falls } k_\varrho=k_\sigma>k_\tau>k_n\\ \infty, & \text{falls} \begin{cases}k_\varrho=k_\sigma>k_\tau=k_n\\ k_\varrho>k_\sigma=k_\tau=k_n,\end{cases}\end{cases}$$

so gelten die Ungleichungen (4.11) für das Intervall $\xi_1<x<x(\varrho,\sigma,\tau)$. Insbesondere ist also für jedes ξ_2 aus diesem Intervall

$$(4.13)\quad \Psi_1=\Psi_1(\xi_2)=\Psi(\xi_2,d_1^*,0)\leqq\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)\leqq\Psi(\xi_2,0,0,)=\Psi_2(\xi_2)=\Psi_2.$$

Ist $K_\sigma>K_\tau$, so fallen die Funktionswerte $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)$ nach (4.9) sowohl in Richtung wachsender η_ϱ als auch in Richtung wachsender η_σ, während im Falle $K_\sigma=K_\tau$ die Funktion $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)$ auf jeder Parallelen zur η_σ-Achse konstant ist. Ebenfalls fällt nach (4.10) die Funktion $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)$ für $K_\varrho>K_\sigma$ und wachsendes η_ϱ auf der Geraden $\eta_\sigma=d_1^*-\eta_\varrho$ und bleibt für $K_\varrho=K_\sigma$ auf dieser Geraden konstant. Betrachten wir nun die Fläche $z=z(\eta_\varrho,\eta_\sigma)=\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)$, so hat diese nach (4.13) für jedes c_2 aus dem Intervall $\langle\Psi_1,\Psi_2\rangle$ mit der Ebene $z=c_2$ eine Schnittkurve gemeinsam, deren Projektion $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$ von Rand zu Rand verläuft. Aus den oben angeführten Gründen verläuft $\mathfrak{C}$ schlicht über der η_σ-Achse und kann keine zwei Punkte der η_ϱ-Achse, der η_σ-Achse oder der Geraden $\eta_\sigma=d_1^*-\eta_\varrho$ miteinander verbinden, außer wenn sie mit der η_σ-Achse bzw. der Geraden $\eta_\sigma=d_1^*-\eta_\varrho$ in ihrem ganzen Verlauf zusammen fällt. Die Kurve $\mathfrak{C}$ besitzt daher eine Darstellung $\eta_\varrho=\chi(\eta_\sigma)$, wobei χ in einem Intervall $\alpha\leqq\eta_\sigma\leqq\beta$ definiert und differenzierbar ist ($0\leqq\alpha\leqq\beta\leqq d_1^*$). α und β sind dabei die η_σ-Koordinaten der Endpunkte der Kurve $\mathfrak{C}$. Ferner ist χ Lösung der Gleichung $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)=c_2$ und für alle Paare $(\eta_\varrho,\eta_\sigma)$, für die η_σ nicht in $\langle\alpha,\beta\rangle$ liegt, ist $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)\neq c_2$ [7]).

Für $\eta_\sigma\in\langle\alpha,\beta\rangle$ setzen wir zur Abkürzung $\Phi^*(x,\eta_\sigma)=\Phi\big(x,\chi(\eta_\sigma),\eta_\sigma\big)$ und $\Psi^*(x,\eta_\sigma)=\Psi\big(x,\chi(\eta_\sigma),\eta_\sigma\big)$ und erhalten für $x>\xi_1$ wegen

$$\frac{d\chi}{d\eta_\sigma}=-\frac{\Psi_{\eta_\sigma}(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)}{\Psi_{\eta_\varrho}(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)}\Big|_{\eta_\varrho=\chi(\eta_\sigma)}$$

und (4.8)

$$(4.14)\quad\begin{cases}\Psi^*_{\eta_\sigma}(x,\eta_\sigma)=\Psi_{\eta_\sigma}(x,\eta_\varrho,\eta_\sigma)+\Psi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho,\eta_\sigma)\dfrac{d\chi}{d\eta_\sigma}\Big|_{\eta_\varrho=\chi=\chi(\eta_\sigma)}\\ \qquad=h_{\mathfrak{R}}\big(\Phi^*(x,\eta_\sigma)\big)\,h'_{\mathfrak{R}}\big(\Phi^*(x,\eta_\sigma)\big)\int\limits_0^{\Phi^*(x,\eta_\sigma)}h_{\mathfrak{R}}^{-1}(u)\,H'_{\mathfrak{R}}(u,\varrho,\tau)\,du\times\\ \qquad\times\{M\big(\Phi^*(x,\eta_\sigma),\varrho,\sigma,\tau\big)-M\big(\Phi^*(\xi_2,\eta_\sigma),\varrho,\sigma,\tau\big)\},\end{cases}$$

[7]) Man beachte, daß hier und im folgenden α, β, χ von c_2 abhängen; dasselbe gilt für die unten definierte Funktion Ψ^*.

wenn wir nur in $h_{\mathfrak{N}}$, $h'_{\mathfrak{N}}$, $H'_{\mathfrak{N}}$ und M jeweils $\eta_\varrho = \chi(\eta_\sigma)$ und $\eta_\tau = d_1^* - \eta_\sigma - \chi(\eta_\sigma)$ einsetzen.

4. Ist $K_\varrho = K_\sigma > K_\tau$, so ist für $x > \xi_1$ nach (4.8) $\Psi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = \Psi_{\eta_\sigma}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma)$, also $\frac{d\chi}{d\eta_\sigma} = -1$, während für $K_\varrho > K_\sigma = K_\tau$ aus (4.9) $\Psi_{\eta_\sigma}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \equiv 0$ und damit auch $\frac{d\chi}{d\eta_\sigma} = 0$ folgt. In beiden Fällen ist also $\Psi^*_{\eta_\sigma}(x, \eta_\sigma) \equiv 0$ und wir erhalten

Satz 5. *Ist $K_\varrho = K_\sigma > K_\tau$ oder $K_\varrho > K_\sigma = K_\tau$ und $\xi_1 < \xi_2 < x(\varrho, \sigma, \tau)$, so ist die Interpolationsaufgabe (b) genau dann lösbar, wenn c_2 im Intervall $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ liegt und mit der dann durch c_2 in $\langle \alpha, \beta \rangle$ bestimmten Funktion $\chi = \chi(\eta_\sigma) = \chi(\eta_\sigma, c_2)$ die Funktionen $\Psi^*(x, \eta_\sigma) = \Psi(x, \chi(\eta_\sigma), \eta_\sigma)$ für jedes η_σ aus $\langle \alpha, \beta \rangle$ die Gleichung $\Psi^*(\xi_3, \eta_\sigma) = c_3$ erfüllen. Ist die Aufgabe lösbar, so erhalten wir die gesuchten Integrale von (1.3) durch*

$$y_\nu(x) = \eta_\nu e^{K_\nu \Phi^*(x, \eta_\sigma)}, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

$$\eta_\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle, \qquad \eta_\varrho = \chi(\eta_\sigma), \qquad \eta_\tau = d_1^* - \eta_\sigma - \chi(\eta_\sigma).$$

Zusatz. a) Da $\Psi^*_{\eta_\sigma}(\xi_3, \eta_\sigma) \equiv 0$ ist, genügt es in Satz 5 zu fordern, daß die Gleichung $\Psi^*(\xi_3, \eta_\sigma) = c_3$ für ein η_σ aus $\langle \alpha, \beta \rangle$ ist.

b) Ist unter den angegebenen Voraussetzungen (*b*) lösbar und ist im Fall $K_\varrho > K_\sigma = K_\tau$ $c_2 \neq \Psi(x, d_1^*, 0)$, so ist (*b*) mehrdeutig lösbar, da jedes η_σ aus $\langle \alpha, \beta \rangle$ gewählt werden kann und hier $\alpha < \beta$ ist.

c) Ist $x(\varrho, \sigma, \tau) < \infty$, so kann nach (4.6) und Hilfssatz 1 auch $\xi_2 = x(\varrho, \sigma, \tau)$ zugelassen werden.

5. Bei den folgenden Überlegungen können wir nun $K_\sigma > K_\varrho > K_\tau$ voraussetzen. Aus unseren Untersuchungen in **3.** folgt zunächst, da $\Psi^*(x, \eta_\sigma)$ eine stetige Funktion von η_σ ist,

Satz 6. *Ist $K_\varrho > K_\sigma > K_\tau$ und $\xi_1 < \xi_2 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau)$, so gibt es mindestens eine Lösung der Interpolationsaufgabe (b), wenn c_2 in $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ liegt und c_3 der Ungleichung*

$$\operatorname{Min}\{\Psi^*(\xi_3, \eta_\sigma) \mid \eta_\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle\} \leqq c_3 \leqq \operatorname{Max}\{\Psi^*(\xi_3, \eta_\sigma) \mid \eta_\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$$

genügt. Liegt c_2 nicht in $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ oder ist die vorangehende Ungleichung nicht erfüllt, so ist die Aufgabe nicht lösbar.

Schränken wir das Intervall für ξ_3 ein, so läßt sich Satz 6 verschärfen zu

Satz 7. *Ist $K_\varrho > K_\sigma > K_\tau$ und $\xi_1 < \xi_2$, $\xi_3 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau)$, $\xi_2 \neq \xi_3$, so ist (b) eindeutig lösbar, wenn c_2 in $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ liegt und*

$$\Psi^*(\xi_3, \alpha) \leqq c_3 \leqq \Psi^*(\xi_3, \beta) \quad \text{für} \quad \xi_1 < \xi_3 < \xi_2$$

bzw.

$$\Psi^*(\xi_3, \beta) \leqq c_3 \leqq \Psi^*(\xi_3, \alpha) \quad \text{für} \quad \xi_1 < \xi_2 < \xi_3$$

gilt.

Beweis. In dem zugelassenen Intervall ist $\Phi^*(x, \eta_\sigma)$ eine eigentlich monoton fallende und daher $M\left(\Phi^*(x, \eta_\sigma), \varrho, \sigma, \tau\right)$ nach (4.6) und Hilfssatz 3 eine im strengen Sinn monoton wachsende Funktion von x. Da das Integral in (4.14) nach (2.12) negativ ist, erhalten wir für $\eta_\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\Psi^*_{\eta_\sigma}(\xi_3, \eta_\sigma) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \xi_1 < \xi_3 < \xi_2 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau) \\ < 0 & \text{für} \quad \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau). \end{cases}$$

Hieraus und aus Satz 6 folgt nun die Behauptung unmittelbar.

Der Zusatz in Hilfssatz 3 zeigt, daß Satz 7 für $\xi_1 < \xi_2 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau) < \xi_3$ falsch werden kann.

Sind die Voraussetzungen und Bedingungen des Satzes 7 erfüllt, so gibt es genau ein $\bar{\eta}_\sigma$ aus dem Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, für das $\Psi^*(\xi_3, \bar{\eta}_\sigma) = c_3$ ist. Das Integral von (1.3), das die Bedingungen (*b*) erfüllt, wird daher durch

$$y_\nu(x) = \bar{\eta}_\nu e^{K_\nu \Phi^*(x, \bar{\eta}_\sigma)}, \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad \bar{\eta}_\nu = \eta_\nu \text{ für } \nu \neq \varrho, \sigma, \tau, \begin{cases} \bar{\eta}_\varrho = \chi(\bar{\eta}_\sigma) \\ \bar{\eta}_\tau = d_1^* - \bar{\eta}_\sigma - \bar{\eta}_\varrho \end{cases}$$

gegeben.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 9. Juli 1960)

EWEIDA, M. T.
Math. Zeitschr. 74, 319—324 (1960)

On Bessel Polynomials

By
M. T. EWEIDA

1. INTRODUCTION. The Bessel polynomials were defined by KRALL and FRINK [9] as the solution of the differential equation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (ax+b)\frac{dy}{dx} - n(n+a-1)\,y = 0$$

where n is a positive integer and a and b are arbitrary parameters. Several authors as AGARWAL [1], AL-SALAM [2], BRAFMAN [3], BURCHNALL [4], CARLITZ [5], DICKINSON [6], GROSSWALD [8], RAINVILLE [10] and TOSCANE [11] have contributed to the study of the Bessel polynomials.

In this paper we shall study further these polynomials to obtain more properties, integral representations and expansion formulae.

2. Let

$$Y_n^{(\alpha)}(x) = y_n(x, \alpha+2, 2) \quad \text{and} \quad Y_n^{(0)}(x) = y_n(x).$$

Following the definition of BURCHNALL,

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x) = x^n\, Y_n^{(\alpha)}(1/x) \quad \text{and} \quad \vartheta_n(x) = x^n\, y_n(1/x). \tag{2.1}$$

Also it is easy to see the relation between the Bessel polynomials and the Laguerre polynomials namely

$$Y_n^{(\alpha)}(x) = n!\left(-\frac{x}{2}\right)^n L_n^{(-2n-\alpha-1)}\left(\frac{2}{x}\right) \tag{2.2}$$

and

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x) = n!\,(-2)^{-n} L_n^{(-2n-\alpha-1)}(2x). \tag{2.3}$$

Also from the definition of the modified Bessel function $\mathsf{K}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ [12; 80], it follows directly [5]

$$\mathsf{K}_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}\, x^{-(n+\frac{1}{2})}\, \vartheta_n(x). \tag{2.4}$$

Again from the definition of the modified Bessel function $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$ [12; 80],

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-)^n}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-(n+\frac{1}{2})} \cdot \{e^x \vartheta_n(-x) - e^{-x}\vartheta_n(x)\}, \tag{2.5}$$

$$\underline{I}_{(n+\frac{1}{2})}(x) = \frac{(-)^n}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-(n+\frac{1}{2})} \cdot \{e^x \vartheta_n(-x) + e^{-x}\vartheta_n(x)\}. \tag{2.6}$$

Also we can deduce the following relationships:

$$\vartheta_n(x) = (-)^n e^x x^{(2n+1)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \cdot \left\{\frac{e^{-x}}{x}\right\}, \tag{2.7}$$

$$\vartheta_n(-x) = (-)^n e^{-x} x^{(2n+1)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \cdot \left\{\frac{e^{x}}{x}\right\}, \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \cdot \{e^{-x}\vartheta_n(x)\} = (-)^m e^{-x}\vartheta_{n-m}(x), \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \cdot \{e^{x}\vartheta_n(-x)\} = (-)^m e^{x}\vartheta_{n-m}(-x). \tag{2.10}$$

Let $\psi(a, c; x)$ be the confluent hypergeometric function [7; V. I; 248]. Hence

$$\left\{\begin{aligned} \Theta_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{2^n}\psi(-n, -2n-\alpha;\ 2x) \\ &= 2^{n+\alpha+1}\, x^{(2n+\alpha+1)}\, \psi(n+\alpha+1,\ 2n+\alpha+2;\ 2x). \end{aligned}\right. \tag{2.11}$$

Since

$$\begin{aligned} &\frac{d^n}{dx^n}\{\psi(k+\alpha+1,\ 2k+\alpha+2;\ x)\} \\ &= (-)^n (k+\alpha+1)_n \psi(k+\alpha+n+1,\ 2k+\alpha+n+2;\ x), \end{aligned}$$

where

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1),$$

we have

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{\Theta_k^{(\alpha)}(x/2)}{x^{2k+\alpha+1}}\right\} = (-)^n (k+\alpha+1)_n \left\{\frac{\Theta_k^{(\alpha+n)}(x/2)}{x^{2k+\alpha+n+1}}\right\}. \tag{2.12}$$

We can express $\vartheta_n(x)$ in terms of MEIJER's G-function as follows. Since [7; V. I; 206]

$$e^{-x}\mathsf{K}_\nu(x) = \pi^{\frac{1}{2}} G_{12}^{20}(2x\,|\,{}^{\frac{1}{2}}_{\nu,\ -\nu})$$

then it follows from (2.4)

$$\vartheta_n(x) = 2^{\frac{1}{2}} x^{n+\frac{1}{2}} e^{2x} G_{12}^{20}(2x\,|\,{}^{\frac{1}{2}}_{n+\frac{1}{2},\ -(n+\frac{1}{2})}). \tag{2.13}$$

3. SOME INTEGRAL REPRESENTATIONS. We remark first that since

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\, dt = \Gamma(a)\,\psi(a, c; x) \qquad (Re(a) > 0)$$

it follows directly from (2.1), (2.11), that

$$Y_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^\infty t^{(\alpha+n)} \left(1+\frac{xt}{2}\right)^n \exp(-t)\, dt$$

which is the integral given by AGARWAL [1] to define the Bessel polynomials.

Since

$$\mathsf{K}_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}x)^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+1)} \cdot \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^n\, dt \qquad (Re(x) > 0)$$

it follows from (2.4)

$$\vartheta_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} e^x \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^n dt \tag{3.1}$$

or

$$\vartheta_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} e^x \int_0^\infty e^{-x\cosh\varphi} \cdot (\sinh\varphi)^{2n+1} d\varphi. \tag{3.2}$$

Now

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-1}^{1} e^{-xt}(t^2-1)^n dt,$$

so that from (2.5)

$$(-)^n \vartheta_n(-x) = \frac{x^{2n+1} e^{-x}}{2^n n!} \cdot \int_{-1}^{\infty} e^{-xt}(t^2-1)^n dt. \tag{3.3}$$

Again from the relation [7; V. II; 83]

$$K_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2x)^\nu \Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}) \int_0^\infty (t^2+x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \cos t\, dt$$

we obtain

$$\vartheta_n(x) = \frac{2^{n+1}}{\pi} n!\, e^x \cdot x^{2n+1} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2+n^2)^n} dt. \tag{3.4}$$

Also using the relation [7; V. II; 190]

$$n!\, L_n^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha[2(tx)^{\frac{1}{2}}]\, dt$$

and (2.3) we get

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x) = (-)^{n+\alpha+1} \cdot 2^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{2x} x^{\frac{2n+\alpha+1}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right)} J_{2n+\alpha+1}[2(2tx)^{\frac{1}{2}}]\, dt. \tag{3.5}$$

Also if $x>0$, we know [7; V. I; 274]

$$\psi(n+\alpha+1,\ 2n+\alpha+2;\ 2x)$$

$$= (2x)^{n+\alpha+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-x\cosh 2t} P_{2n+\alpha+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha}(\cosh t) \cdot (2\sinh t)^{\alpha+\frac{1}{2}} dt.$$

Thus

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x) = 2^{2n+2\alpha+\frac{3}{2}} x^{(3n+2\alpha+\frac{3}{2})} \int_0^\infty e^{-x\cosh 2t} P_{2n+\alpha+\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-\alpha)}(\cosh t) \cdot (2\sinh t)^{\alpha+\frac{1}{2}} dt.$$

Put $\alpha = -n$

$$\Theta_n^{(-n)}(x) = 2^{\frac{3}{2}} x^{n+\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-x\cosh 2t} P_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\cosh t) \cdot (2\sinh t)^{-(n-\frac{1}{2})} dt, \tag{3.6}$$

where $P_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(x)$ is the associated Legendre function.

Again since if $x>0$ [7; V. I; 286]

$$\pi\psi(-n,-2n;2x)\cdot\psi(-n,-2n;2x)=2e^{2x}(2x)^{2n+1}\int_0^{\pi/2}K_{2n+1}(x\sec t)\cdot\sec t\,dt,$$

then

$$\pi[\vartheta_n(x)]^2=2^2x^{2n+1}e^{2x}\int_0^{\infty}K_{2n+1}(2x\cosh t)\,dt. \tag{3.1}$$

Similarly we can show

$$\pi[\vartheta_n(x)]^2=2^2x^{2n+1}e^{2x}\int_0^{\infty}K_0(2x\cosh t)\cdot\cosh(2n+1)\,t\,dt. \tag{3.8}$$

Moreover if m, n are positive integers $(m>n,\ \mathrm{Re}(x)>-1)$

$$\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n+1)\,P_n^{-m}(x)=(\pi/2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-1)^{m/2}\int_0^{\infty}e^{-tx}K_{n+\frac{1}{2}}(t)\cdot t^{m-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Thus from (2.4)

$$\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n+1)\,P_n^{-m}(x)=(x^2-1)^{m/2}\int_0^{\infty}e^{-t(x+1)}t^{m-n-1}\,\vartheta_n(t)\,dt \tag{3.9}$$

or

$$\begin{cases}\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n+1)\int_1^x\cdots\int_1^x P_n(x)\,(dx)^m\\ =(x^2-1)^m\int_0^{\infty}e^{-t(x+1)}t^{m-n-1}\,\vartheta_n(t)\,dt,\end{cases} \tag{3.10}$$

where $P_n(x)$ is the Legendre polynomial.

Using the integral [7; V. I; 95]

$$\int_0^{\infty}K_\nu[a(t^2+z^2)^{\frac{1}{2}}]\cdot(t^2+z^2)^{-\nu/2}\cdot t^{2\mu+1}\,dt$$
$$=2^\mu a^{-\mu-1}z^{1+\mu-\nu}\Gamma(\mu+1)\,K_{\nu-\mu-1}(az)\quad(a>0,\ \mathrm{Re}(\mu)>-1)$$

and (2.4) we can obtain

$$\vartheta_{n-1}(z)=z^{2n-1}e^z\int_z^{\infty}e^{-t}t^{-2n}\,\vartheta_n(t)\,dt. \tag{3.11}$$

Also since we have [7; V. I; 51]

$$\int_0^{\infty}K_\nu(\beta t)\cdot t^{\mu-1}\,dt=2^{\mu-2}\beta^{-\mu}\,\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right),$$

where $\mathrm{Re}(\mu\pm\nu)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$; then putting $\mu=n+\frac{3}{2}$, $\nu=n+\frac{1}{2}$, $\beta=1$, we can easily obtain

$$2^n(n!)=x\int_0^{\infty}e^{-xt}\,\vartheta_n(xt)\,dt \tag{3.12}$$

or

$$2^n(n!)=\int_0^{\infty}e^{-t}\,\vartheta_n(t)\,dt. \tag{3.13}$$

4. INTEGRAL REPRESENTATION OF THE PRODUCT OF TWO BESSEL POLYNOMIALS. Since [12; 439]

$$K_\nu(u)\,K_\nu(v)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{t}{2}-\frac{(u^2+v^2)}{2t}\right]K_\nu\left(\frac{uv}{t}\right)dt$$

and (2.4) we deduce

$$\vartheta_n(u)\,\vartheta_n(v) = \frac{e^{u+v}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[t+\frac{(u+v)^2}{t}\right]} \cdot t^{n-\frac{1}{2}} \cdot \vartheta_n\left(\frac{u\,v}{t}\right) dt. \tag{4.1}$$

Put $v=-u$, then

$$\vartheta_n(u)\cdot\vartheta_n(-u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\, t^{n-\frac{1}{2}}\, \vartheta_n\left(\frac{-u^2}{t}\right) dt. \tag{4.2}$$

5. Expansion formulae. Since if $s>r$ [7; V. II; 100]

$$(s^2-r^2)^{-\frac{1}{4}}\, \mathsf{K}_{\frac{1}{2}}\left[z\,(s^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{z\,r^2}{2}\right)^m \cdot \frac{s^{-m-\frac{1}{2}}}{m!} \cdot \mathsf{K}_{m+\frac{1}{2}}(z\,s)$$

then it follows from (2.4) and the definition of $\mathsf{K}_{\frac{1}{2}}(x)$

$$\frac{s\, e^{z\left[z-(s^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]}}{(s^2-r^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{r^2}{2s}\right)^m \cdot \frac{\vartheta_m(z\,s)}{m!}. \tag{5.1}$$

Put $s=r\cosh\varphi$, we get

$$e^{z\,r\exp(\varphi)} = \tanh\varphi \cdot \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{r}{2\cosh\varphi}\right)^m \cdot \frac{\vartheta_m(z\,r\cosh\varphi)}{m!}. \tag{5.2}$$

Also since if $|\lambda-1|<1$,

$$\psi(a,c;2\lambda x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k}{k!}(1-\lambda)^k \cdot (2x)^k\, \psi(a+k,\, c+k;\, 2x)$$

then using (2.11) we obtain

$$\Theta_n^{(\alpha)}(\lambda x) = \lambda^{(2n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(n+\alpha+1)_k}{k!} \cdot (1-\lambda)^k\, \Theta_n^{(\alpha+k)}(x). \tag{5.3}$$

As a particular case put $\alpha=-n$, $\mu=\lambda-1$, we obtain [2]

$$\frac{1}{1+\mu}\, Y_n^{-n}\left(\frac{x}{1+\mu}\right) = \sum_{k=0}^\infty (-\mu)^k \cdot Y_n^{k-n}(x). \tag{5.4}$$

Again by putting $\lambda=\left(1+\frac{y}{x}\right)$ in (5.3), we have

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x+y) = \left(\frac{x+y}{x}\right)^{2n+\alpha+1} \sum_{k=0}^\infty (-)^k\, \frac{(n+\alpha+1)_k}{k!} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^k \cdot \Theta_n^{(\alpha+k)}(x). \tag{5.5}$$

6. Finally it is worth mentioning that since

$$\mathsf{K}_\mu(x) = \lim_{\nu\to\infty}\left\{\nu^{-\mu}\, e^{-i\mu\pi}\, Q_\nu^\mu\left(\frac{\cosh x}{\nu}\right)\right\},$$

where Q_ν^μ is the Legendre function of the second kind, then

$$\vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^x \cdot x^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \lim_{\nu\to\infty}\left\{\nu^{-(n+\frac{1}{2})} \cdot e^{-i(n+\frac{1}{2})\pi}\, Q_\nu^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\cosh x}{n+\frac{1}{2}}\right)\right\}. \tag{6.1}$$

References

[1] Agarwal, R. P.: On Bessel polynomials. Canad. J. Math. **6**, 410—415 (1954). — [2] Al-Salam, W. A.: The Bessel polynomials. Duke Math. J. **24**, No. 4, 529—546 (1957). — [3] Brafman, F.: A set of generating functions for Bessel polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 275—277 (1953). — [4] Burchnall, J. L.: The Bessel polynomials. Canad. J. Math. **3**, 62—68 (1951). — [5] Carlitz, L.: On the Bessel polynomials. Duke Math. J. **24**, 151—162 (1957). — [6] Dickinson, D.: On Lommel and Bessel polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 946—956 (1954). — [7] Erdelyi: Higher transcendental functions, I and II. NewYork-Toronto-London: McGraw-Hill 1953. — [8] Grosswald, E.: On some algebraic properties of the Bessel polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 197—210 (1951). — [9] Krall, H., and O. Frink: A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **55**, 100—115 (1949). — [10] Rainville, E. D.: Generating functions for Bessel and related polynomials. Canad. J. Math. **5**, 104—106 (1953). — [11] Toscano, L.: Osservazioni, confronti e complementi su particolari polinomi ipergeometrici. Le Matematiche **10**, 121—133. — [12] Watson, G. N.: Theory of Bessel functions. Cambridge 1952.

Department of Pure Mathematics, Faculty of Science, Cairo University (U.A.R.)

(Eingegangen am 19. November 1959)

Specht, W.
Math. Zeitschr. 74, 325—366 (1960)

Zur Theorie der meßbaren Gruppen

Von
Wilhelm Specht

In einer Untersuchung zur allgemeinen Theorie des Maßes über den unter dem Namen „Hausdorffsches Paradoxon" berühmt gewordenen Satz [1]) hat J. von Neumann [2]) den Begriff der meßbaren Gruppe eingeführt: Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *meßbar*, wenn in ihr eine reellwertige Funktion

$$\mu\colon\ \mathfrak{K} \to \mu(\mathfrak{K})$$

erklärt werden kann, die jedem Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ ein reelles *Maß* $\mu(\mathfrak{K})$ zuordnet unter Einhaltung nachstehender Bedingungen [3]):

1. *Es gilt* $\mu(\mathfrak{G}) = 1$.

2. *Es gilt* $\mu(\mathfrak{K}) \geqq 0$ *für jeden Komplex* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$.

3. *Für jedes Paar von Komplexen* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{G}$ *mit leerem Durchschnitt* $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = 0$ *besteht die Gleichung*

$$\mu(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2).$$

4. *Für jeden nichtleeren Komplex* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ *und jedes Element* $G \in \mathfrak{G}$ *gilt*

$$\mu(\mathfrak{K}G) = \mu(\mathfrak{K}).$$

Es bezeichne im folgenden $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$ die (abstrakte) Gruppeneigenschaft [4]), eine *meßbare Gruppe* zu sein:

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{G}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn die Gruppe } \mathfrak{G} \text{ meßbar ist,} \\ 0, & \text{wenn die Gruppe } \mathfrak{G} \text{ nicht meßbar ist.} \end{cases}$$

Da sowohl meßbare als auch nicht meßbare Gruppen existieren, erhebt sich die Frage nach einer Abgrenzung der Klasse aller meßbaren Gruppen.

1.

Die Definition der Meßbarkeit einer Gruppe kann, weil in sie die Eigenschaft der Invertierbarkeit der Elemente nicht eingeht, auf Halbgruppen aus-

[1]) Vgl. F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914. Anhang, Anmerkungen zum zehnten Kapitel.

[2]) Vgl. J. v. Neumann: Zur allgemeinen Theorie des Maßes. Fundamenta math. **13**, 71—116 (1929).

[3]) In Bezeichnung und Begriffbildung stütze ich mich auf mein Buch: W. Specht, Gruppentheorie. Berlin: Springer 1956. (Weiterhin mit GT zitiert.)

[4]) Über abstrakte Gruppeneigenschaften vgl. GT, Abschnitt 1.4.4. — R. Baer: Die Potenzen einer gruppentheoretischen Eigenschaft. Abh. Hamburg **22**, 276—294 (1958).

gedehnt werden [5]). Eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ heiße demgemäß *meßbar*, wenn jedem Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ ein reelles Maß $\mu(\mathfrak{K})$ zugeordnet werden kann unter Einhaltung nachstehender Bedingungen:

1. *Es gilt* $\mu(\mathfrak{H}) = 1$.

2. *Es gilt* $\mu(\mathfrak{K}) \geqq 0$ *für jeden Komplex* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$.

3. *Für jedes Paar von Komplexen* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{H}$ *mit leerem Durchschnitt* $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = 0$ *besteht die Gleichung*

$$\mu(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2).$$

4. *Für jeden Komplex* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ *und jedes Element* $H \in \mathfrak{H}$ *gilt*

$$\mu(\mathfrak{K}H) = \mu(\mathfrak{K}).$$

Die Eigenschaft der Meßbarkeit einer Gruppe läßt sich noch in anderer, für Beweisführungen häufig besser geeigneten Weise beschreiben, wobei ich wiederum aus Zweckmäßigkeitsgründen die Begriffe allgemeiner für Halbgruppen auseinandersetze:

Ist eine beliebige Halbgruppe $\mathfrak{H}$ vorgegeben, so will ich unter einer (*beschränkten, reellen*) *Funktion* $f(X)$ *auf* $\mathfrak{H}$ eine Abbildungsvorschrift

$$f\colon X \to f(X)$$

verstehen, die jedem Element $X \in \mathfrak{H}$ einen reellen Wert $f(X)$ aus einem endlichen Intervall

$$-\infty < C_f = \inf_{X \in \mathfrak{H}} f(X) \leqq f(X) \leqq \sup_{X \in \mathfrak{H}} f(X) = C_f < +\infty$$

der reellen Zahlengeraden zuordnet. Da die (in üblicher Weise erklärte) lineare Verbindung

$$f(X) = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X)$$

beliebiger beschränkter Funktionen $f_1(X)$, $f_2(X)$ auf $\mathfrak{H}$ mit beliebigen reellen Faktoren a_1, a_2 wieder eine reelle beschränkte Funktion auf $\mathfrak{H}$ darstellt, ist die Menge $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ aller reeller beschränkter Funktionen auf der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ein linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Jede Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ läßt sich durch ein beliebiges Element $H \in \mathfrak{H}$ in eine (gleichfalls beschränkte) Funktion

$$f^H(X) = f(XH)$$

transformieren. Jeder reellen Zahl c entspricht eine konstante Funktion $f(X) = c$, die jedem Element $X \in \mathfrak{H}$ den Wert c zuordnet.

Der lineare Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ über einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ besitzt ein *additives Maß*, wenn jeder Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ ein (reeller) *Mittelwert* $M(f)$ zugeordnet werden kann unter Einhaltung nachstehender Bedingungen:

1. *Unterliegt die Funktion* $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *der Beschränkung*

$$c_f \leqq f(X) \leqq C_f$$

[5]) Vgl. GT, Abschnitt 1.3.1.

für jedes $X \in \mathfrak{H}$, *so gilt*

$$c_f \leqq M(f) \leqq C_f.$$

2. *Für jedes Paar von Funktionen* $f_1(X), f_2(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *und jedes Paar reeller Zahlen* a_1, a_2 *besteht die Gleichung*

$$M(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 M(f_1) + a_2 M(f_2).$$

3. *Für jede Funktion* $f(X) \in B(\mathfrak{H})$ *und jedes Element* $H \in \mathfrak{H}$ *besteht die Gleichung*

$$M(f^H) = M(f).$$

Unter Verwendung der soeben eingeführten Begriffe gilt

Satz 1. *Eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist genau dann meßbar, wenn der Funktionenraum* $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ *über* $\mathfrak{G}$ *ein additives Maß besitzt.*

Bemerkung. Da der Beweis dieses Satzes wesentlich von der Invertierbarkeit der Elemente einer Gruppe abhängt, kann die gleiche Aussage für Halbgruppen allgemein nicht erwartet werden.

Beweis. Besitzt der Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ über der Gruppe $\mathfrak{G}$ ein additives Maß, so entspricht jedem Komplex $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{G}$ eine charakteristische (beschränkte) Funktion

$$\varphi_{\mathfrak{K}}(X) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } X \in \mathfrak{K}, \\ 0, & \text{wenn } X \notin \mathfrak{K}, \end{cases}$$

mit dem Mittelwert

$$\mu(\mathfrak{K}) = M(\varphi_{\mathfrak{K}}).$$

Die hierdurch erklärte Funktion ist, wie man leicht nachprüft, ein Maß der Gruppe $\mathfrak{G}$. Denn es gilt

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(X) = 1 \qquad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G},$$

also

$$\mu(\mathfrak{G}) = 1,$$

ferner

$$\varphi_{\mathfrak{K}}(X) \geqq 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G} \text{ und jedes } \mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{G},$$

also

$$\mu(\mathfrak{K}) \geqq 0.$$

Für Komplexe $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \subseteqq \mathfrak{G}$ mit leerem Durchschnitt $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = 0$ besteht ferner die Gleichung

$$\varphi_{\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2}(X) = \varphi_{\mathfrak{K}_1}(X) + \varphi_{\mathfrak{K}_2}(X),$$

woraus

$$\mu(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2)$$

folgt. Schließlich gilt für jeden Komplex $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{G}$ und jedes Element $G \in \mathfrak{G}$

$$\varphi_{\mathfrak{K}G}(X) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } X \in \mathfrak{K}G, \\ 0, & \text{wenn } X \notin \mathfrak{K}G, \end{cases}$$

$$\varphi_{\mathfrak{K}}^{G^{-1}}(X) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } XG^{-1} \in \mathfrak{K}, \text{ d.h. } X \in \mathfrak{K}G, \\ 0, & \text{wenn } XG^{-1} \notin \mathfrak{K}, \text{ d.h. } X \notin \mathfrak{K}G, \end{cases}$$

also

$$\varphi_{\mathfrak{R}}^{G^{-1}}(X) = \varphi_{\mathfrak{R}}(XG^{-1}) = \varphi_{\mathfrak{R}G}(X) \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G}$$

und folglich

$$\mu(\mathfrak{R}) = M(\varphi_{\mathfrak{R}}) = M(\varphi_{\mathfrak{R}}^{G^{-1}}) = M(\varphi_{\mathfrak{R}G}) = \mu(\mathfrak{R}G).$$

Ist andererseits $f(X)$ eine beliebige beschränkte Funktion über einer meßbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Maß $\mu(\mathfrak{R})$, so bezeichne für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$Z_\varepsilon = (\cdots < z_{-2} < z_{-1} < z_0 < z_1 < z_2 < \cdots)$$

eine beliebige Zerlegung der reellen Zahlengeraden in Intervalle

$$z_n \leqq x < z_{n+1} \quad \text{mit} \quad 0 < z_{n+1} - z_n \leqq \varepsilon$$

und $\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)$ den Komplex aller Elemente $X \in \mathfrak{G}$, die der Bedingung

$$z_n \leqq f(X) < z_{n+1}$$

genügen. Da (wegen der Beschränktheit der Funktion $f(X)$) nur endlich viele dieser Komplexe nichtleer sind, stellt

$$M(f, Z_\varepsilon) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z_n \mu\left(\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)\right)$$

eine endliche Summe dar. In bekannter Weise folgert man nun die Konvergenz dieser Werte gegen einen Grenzwert

$$M(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} M(f, Z_\varepsilon).$$

Die hierdurch erklärte Funktion $M(f)$ stellt dann ein additives Maß des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ dar.

Unterliegt nämlich die Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{G})$ der Beschränkung

$$c_f \leqq f(X) \leqq C_f \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G},$$

so gilt auch

$$c_f \leqq M(f) \leqq C_f.$$

Die Eigenschaft

$$M(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 M(f_1) + a_2 M(f_2)$$

ist unmittelbar erkennbar. Für die transformierte Funktion

$$f^H(X) = f(XH)$$

besteht die Ungleichung

$$z_n \leqq f^H(X) = f(XH) < z_{n+1}$$

genau dann, wenn

$$X \in \mathfrak{R}(f^H, Z_\varepsilon, n) \quad \text{bzw.} \quad XH \in \mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n).$$

Mithin besteht die Gleichung

$$\mu\left(\mathfrak{R}(f^H, Z_\varepsilon, n)\right) = \mu\left(\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)\, H^{-1}\right) = \mu\left(\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)\right),$$

also auch die Gleichung

$$M(f^H, Z_\varepsilon) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z_{n,\mu}\left(\mathfrak{K}(f^H, Z_\varepsilon, n)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z_{n,\mu}\left(\mathfrak{K}(f, Z_\varepsilon, n)\right) = M(f, Z_\varepsilon).$$

Hieraus folgt

$$M(f^H) = M(f).$$

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Die Existenz meßbarer Gruppen zeigt der

Satz 2. *Jede endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist meßbar.*

Beweis. Besitzt die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ordnung $\operatorname{ord}(\mathfrak{G}) = g$ und die Elemente $G_1, G_2, \ldots, G_g$, so läßt sich jede Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(G)$ als g-tupel

$$f(X) = [f(G_1), f(G_2), \ldots, f(G_g)]$$

reeller Zahlen beschreiben. Man überzeugt sich leicht davon, daß der Ausdruck

$$M(f) = \frac{1}{g}\left(f(G_1) + f(G_2) + \cdots + f(G_g)\right)$$

die geforderten Eigenschaften eines Mittelwertes besitzt. Mithin ist die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ meßbar.

Als Ergänzung zu diesem Satze mag noch erwähnt werden:

Satz 2*. *Eine endliche meßbare Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einheit E ist eine (endliche) Gruppe.*

Beweis. Besitzt die Halbgruppe $\mathfrak{H}$ die Ordnung $\operatorname{ord}(\mathfrak{H}) = h$ und die Elemente $E = H_1, H_2, \ldots, H_h$, so bestehen die Gleichungen

$$\mu(E) = \mu(H_2) = \cdots = \mu(H_h)$$

und

$$1 = \mu(\mathfrak{H}) = \mu(E) + \mu(H_2) + \cdots + \mu(H_h) = h\,\mu(E).$$

Mithin gilt

$$\mu(H) = 1/h \quad \text{für jedes } H \in \mathfrak{H}.$$

Daher besteht für einen Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ die Gleichung

$$\mu(\mathfrak{K}) = k/h$$

genau dann, wenn $\mathfrak{K}$ aus k Elementen besteht. Die für jedes Element $H \in \mathfrak{H}$ gültige Gleichung

$$\mu(\mathfrak{H}) = \mu(\mathfrak{H}H) = 1$$

zeigt, daß der Komplex $\mathfrak{H}H$ aus genau h Elementen besteht. Da hieraus die Gleichung

$$\mathfrak{H}H = \mathfrak{H} \quad \text{für jedes } H \in \mathfrak{H}$$

folgt, ist $\mathfrak{H}$ eine (endliche) Gruppe.

Die Existenz nichtmeßbarer Gruppen zeigt der

Satz 3 (F. HAUSDORFF). *Das freie Produkt*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3} = \mathfrak{Z}_2 * \mathfrak{Z}_3$$

einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}_2$ *der Ordnung* 2 *und einer zyklischen Gruppe* $\mathfrak{Z}_3$ *der Ordnung* 3 *ist eine nichtmeßbare Gruppe.*

Beweis. Jedes Element der Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3} = \{A, B\} \quad \text{mit } A^2 = B^3 = E$$

besitzt eine (eindeutige) Normalform

$$F_k = B^{\nu} A B^{\nu_1} A B^{\nu_2} \dots A B^{\nu_k} \quad \text{bzw.} \quad G_k = B^{\nu} A B^{\nu_1} A B^{\nu_2} \dots A B^{\nu_k} A,$$

deren Exponenten ν bzw. $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ einen der Werte 0, 1, 2 bzw. einen der Werte 1, 2 haben. Den Index $k \geqq 0$ nennen wir die Länge der Elemente $F_k, G_k \in \mathfrak{G}$; von der Länge $k = 0$ sind die Elemente

$$F_0 = E, B, B^2 \quad \text{bzw.} \quad G_0 = A, BA, B^2 A.$$

Wir zerlegen nun die Gruppe $\mathfrak{G}$ in drei paarweise fremde Komplexe:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2,$$

dergestalt daß die Gleichungen

$$\mathfrak{K}_0 A = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2; \qquad \mathfrak{K}_0 B = \mathfrak{K}_1; \qquad \mathfrak{K}_0 B^2 = \mathfrak{K}_2$$

bestehen, und zwar nach folgender induktiver Vorschrift (bezüglich der Länge der Elemente von $\mathfrak{G}$):

1. Es gelte $F_0 = B^{\nu} \in \mathfrak{K}_{\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2$.

2. Wenn $F_k \in \mathfrak{K}_0$, dann gelte $G_k = F_k A \in \mathfrak{K}_1$; wenn $F_k \in \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$, dann gelte $G_k = F_k A \in \mathfrak{K}_0$.

3. Wenn $G_k \in \mathfrak{K}_{\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2$, dann gelte

$$F_{k+1} = G_k B \in \mathfrak{K}_{\nu+1} \quad \text{und} \quad F_{k+1} = G_k B^2 \in \mathfrak{K}_{\nu+2}$$

(bei mod 3 reduzierten Indizes).

Offensichtlich sind nach dieser Vorschrift die Komplexe $\mathfrak{K}_{\nu}$ paarweise fremd, und es besteht die Gleichung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2.$$

Für Elemente $F_k \in \mathfrak{K}_0$ bzw. $G_k' = F_k' A \in \mathfrak{K}_0$ gilt weiter

$$F_k A = G_k \in \mathfrak{K}_1 \quad \text{bzw.} \quad G_k' A = F_k' \in \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2;$$

daher besteht die Beziehung

$$\mathfrak{K}_0 A \subseteqq \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2.$$

Für Elemente $F_k \in \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ bzw. $G_k' = F_k' A \in \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ gilt

$$F_k A = G_k \in \mathfrak{K}_0 \quad \text{bzw.} \quad G_k' = F_k' A \in \mathfrak{K}_1, \quad \text{also} \quad G_k' A = F_k' \in \mathfrak{K}_0;$$

hieraus folgt

$$(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2) A \subseteqq \mathfrak{K}_0$$

und damit die Gleichung

$$\mathfrak{K}_0 A = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2.$$

Für Elemente $G_k \in \mathfrak{K}_\nu$ bzw. $F'_{k+1} = G'_k B \in \mathfrak{K}_\nu$ bzw. $F''_{k+1} = G''_k B^2 \in \mathfrak{K}_\nu$ gilt gemäß der Vorschrift

$$F_{k+1} = G_k B \in \mathfrak{K}_{\nu+1}$$

bzw.

$$F'_{k+1} B^2 = G'_k \in \mathfrak{K}_{\nu-1}, \qquad \text{also } F'_{k+1} B = G'_k B^2 \in \mathfrak{K}_{\nu+1}$$

bzw.

$$F''_{k+1} B = G''_k \in \mathfrak{K}_{\nu-2} = \mathfrak{K}_{\nu+1};$$

mithin besteht die Beziehung

$$\mathfrak{K}_\nu B \subseteqq \mathfrak{K}_{\nu+1},$$

also

$$\mathfrak{K}_0 B \subseteqq \mathfrak{K}_1; \qquad \mathfrak{K}_1 B \subseteqq \mathfrak{K}_2; \qquad \mathfrak{K}_2 B \subseteqq \mathfrak{K}_0$$

und folglich

$$\mathfrak{K}_0 B = \mathfrak{K}_1; \qquad \mathfrak{K}_0 B^2 = \mathfrak{K}_2.$$

Wäre nun die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3}$ meßbar, so müßte gelten

$$\begin{aligned} 1 = \mu(\mathfrak{G}) &= \mu(\mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_0) + \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2); \\ \mu(\mathfrak{K}_0) &= \mu(\mathfrak{K}_0 A) = \mu(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2); \\ \mu(\mathfrak{K}_0) &= \mu(\mathfrak{K}_0 B) = \mu(\mathfrak{K}_1); \\ \mu(\mathfrak{K}_0) &= \mu(\mathfrak{K}_0 B^2) = \mu(\mathfrak{K}_2), \end{aligned}$$

was offensichtlich unmöglich ist. Die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3}$ ist also nicht meßbar.

2.

Wesentlich tiefer als das Bisherige liegt der[6])

Satz 4 (S. Banach-J. v. Neumann). *Jede abelsche Gruppe ist meßbar.*

Dieser Satz folgt aus dem allgemeineren, für das Weitere auch als Beweisprinzip wertvollen

Satz 4*. *Der Funktionenraum* $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ *über einer abelschen Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *besitzt ein additives Maß.*

Bemerkung. Auf Grund des Satzes 1 ist der Satz von S. Banach-J. v. Neumann unmittelbare Folgerung des Satzes 4*.

Der Beweis des Satzes 4* bedarf einiger Vorbereitungen[7]). Der Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ über der abelschen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist ein linearer $\mathfrak{H}$-invarianter Raum über dem Körper der reellen Zahlen auf Grund der folgenden drei Eigenschaften:

[6]) Vgl. S. Banach: Sur le problème de la mesure. Fundamenta math. **4**, 7–33 (1923).

[7]) Der hier durchgeführte Beweis ist eine Verallgemeinerung des Banachschen Gedankengangs, gestützt auf Bemerkungen J. v. Neumanns.

1. Jede lineare Verbindung

$$f(X) = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X)$$

von Funktionen $f_1(X), f_2(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit reellen Faktoren a_1, a_2 gehört dem Raum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ an.

2. Jede Transformierte

$$f^H(X) = f(XH)$$

einer Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit einem Element $H \in \mathfrak{H}$ gehört dem Raum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ an.

3. Jede lineare Verbindung

$$f(X) = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X)$$

von Funktionen $f_1(X), f_2(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit reellen Faktoren a_1, a_2 genügt für jedes Element $H \in \mathfrak{H}$ der Gleichung

$$f^H(X) = a_1 f_1^H(X) + a_2 f_2^H(X).$$

Als *$\mathfrak{H}$-invarianten Teilraum des Funktionenraumes* $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ bezeichnen wir jede Teilmenge $\Delta(\mathfrak{H}) \subseteq \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit diesen drei Eigenschaften.

Eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ heiße *Nilfunktion*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

Zu jedem reellen Wert $\varepsilon > 0$ läßt sich eine endliche Serie von Elementen $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathfrak{H}$ angeben, derart daß für jedes $X \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(XH_\nu)\right| < \varepsilon$$

besteht.

Lemma 1. *Die Menge $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ aller Nilfunktionen ist ein $\mathfrak{H}$-invarianter Teilraum des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$.*

Beweis. Für Nilfunktionen $f(X), g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ lassen sich zu vorgegebenem Wert $\varepsilon > 0$ Elemente $F_1, F_2, \ldots, F_m$ bzw. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ aus $\mathfrak{H}$ derart angegeben, daß für jedes $X \in \mathfrak{H}$

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu)\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XG_\nu)\right| < \varepsilon.$$

Daher gilt auch für $1 \leqq \nu \leqq n$ bzw. $1 \leqq \mu \leqq m$ und jedes $X \in \mathfrak{H}$

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XG_\nu F_\mu)\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu)\right| < \varepsilon.$$

Da die Halbgruppe $\mathfrak{H}$ abelsch ist, folgt weiter für jedes Paar reeller Zahlen a, b und jedes $X \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{mn}\left|\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\left[a f(XF_\mu G_\nu) + b g(XF_\mu G_\nu)\right]\right|$$

$$\leqq \frac{|a|}{mn}\sum_{\nu=1}^{n}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XG_\nu F_\mu)\right| + \frac{|b|}{mn}\sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu)\right| < \left(|a|+|b|\right)\varepsilon.$$

Mithin ist auch die lineare Verbindung $af(X) + bg(X)$ eine Nilfunktion.

Besteht für eine Nilfunktion $f(X) \in \mathsf{N}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu)\right| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so gilt für jedes Paar von Elementen $X, H \in \mathfrak{H}$ auch

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f^H(XF_\mu)\right| = \frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XHF_\mu)\right| < \varepsilon.$$

Mithin ist die Transformierte $f^H(X)$ eine Nilfunktion.

Auf das Lemma 1 läßt sich in bekannter Weise eine Klasseneinteilung des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ nach dem Teilraum $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ gründen mittels der Festsetzung:

Zwei Funktionen $f(X), g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *heißen kongruent* mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$:

$$f(X) \equiv g(X) \bmod \mathsf{N},$$

wenn die Differenz $f(X) - g(X)$ *eine Nilfunktion ist.*

Unmittelbare Folgerung aus Lemma 1 ist dann

Lemma 2. *Es gilt* $f(X) \equiv f(X)$ *mod* N.

Aus $f(X) \equiv g(X)$ mod N folgt $g(X) \equiv f(X)$ mod N.

Aus $f(X) \equiv g(X)$ mod N *und* $g(X) \equiv h(X)$ mod N *folgt* $f(X) \equiv h(X)$ mod N.

Aus $f_1(X) \equiv g_1(X)$ mod N *und* $f_2(X) \equiv g_2(X)$ mod N *folgt für beliebige reelle Faktoren* a_1, a_2

$$a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) \equiv a_1 g_1(X) + a_2 g_2(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) \equiv g(X)$ mod N *folgt für jedes Element* $H \in \mathfrak{H}$

$$f^H(X) \equiv g^H(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Besondere Bedeutung kommt für das Weitere der Aussage zu:

Lemma 2*. *Für jede Funktion* $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *und jedes Element* $H \in \mathfrak{H}$ *gilt*

$$f^H(X) \equiv f(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Beweis. Unterliegt die Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ der Beschränkung

$$c \leqq f(X) \leqq C \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so genügt die Funktion

$$g(X) = f(X) - f(XH) \quad \text{mit } H \in \mathfrak{H}$$

der Ungleichung

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XH^\nu)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(XH^\nu) - f(XH^{\nu+1})\right| = \frac{1}{n}\left|f(XH) - f(XH^{n+1})\right| \leqq \frac{C-c}{n}.$$

Mithin ist die Funktion $g(X)$ eine Nilfunktion.

Wir bezeichnen eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ als *positiv* mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$:

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N},$$

wenn eine reelle Zahl $C > 0$ und eine Serie von Elementen $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathfrak{H}$ existiert, derart daß die Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(XH_\nu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

besteht; eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ heißt *negativ* mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$:

$$f(X) < 0 \bmod \mathsf{N},$$

wenn die Funktion $-f(X)$ positiv mod N ist. Wir schreiben für Funktionen $f(X), g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ auch

$$f(X) > g(X) \bmod \mathsf{N} \quad \text{oder} \quad g(X) < f(X) \bmod \mathsf{N},$$

wenn $f(X) - g(X)$ positiv mod N ist.

Für diese Ordnung der Funktionen $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ stellen wir leicht nachstehende Regeln fest:

Lemma 3. *Aus* $f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $f^H(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *für jedes* $H \in \mathfrak{H}$.
Aus $f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt*

$$f(X) + g(X) > 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt für jede reelle Zahl* $a > 0$

$$a f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt*

$$f(X) + g(X) > 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) > g(X) \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X) > h(X) \bmod \mathsf{N}$ *folgt*

$$f(X) > h(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) > g(X) \bmod \mathsf{N}$ *und*

$$f(X) \equiv f_1(X) \bmod \mathsf{N}; \quad g(X) \equiv g_1(X) \bmod \mathsf{N}$$

folgt

$$f_1(X) > g_1(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Beweis. Besteht für eine mod N positive Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so folgt für jedes Element $H \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} f^H(XF_\mu) = \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} f(XHF_\mu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

für jede reelle Zahl $a > 0$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} a\, f(XF_\mu) \geqq a\, C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

Besteht für eine weitere mod N positive Funktion $g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} g(XG_\nu) \geqq D > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so folgt für $1 \leqq \nu \leqq n$ bzw. $1 \leqq \mu \leqq m$ und jedes $X \in \mathfrak{H}$

$$\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu G_\nu) \geqq C > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu) \geqq D > 0,$$

also

$$\frac{1}{m\,n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}[f(XF_\mu G_\nu) + g(XF_\mu G_\nu)] \geqq C + D > 0.$$

Besteht für eine mod N positive Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so lassen sich zu einer Nilfunktion $g(X) \in \mathsf{N}(\mathfrak{H})$ Elemente $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathfrak{H}$ angeben, derart daß

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XG_\nu)\right| < \frac{C}{2} \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

Daraus folgt für $1 \leqq \nu \leqq n$ bzw. $1 \leqq \mu \leqq m$ und jedes $X \in \mathfrak{H}$

$$\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu G_\nu) \geqq C > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu)\right| < \frac{C}{2},$$

also

$$\frac{1}{m\,n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}[f(XF_\mu G_\nu) + g(XF_\mu G_\nu)]$$

$$\geqq \frac{1}{m\,n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} f(XF_\mu G_\nu) - \frac{1}{m\,n}\sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu)\right| > C - \frac{C}{2} = \frac{C}{2} > 0.$$

Die letzten beiden Aussagen des Lemma 3 sind unmittelbare Folgerungen des Vorangehenden.

Wir stellen ferner fest:

Lemma 3*. *Eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ erfüllt höchstens eine der drei Beziehungen*

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}; \quad f(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N}; \quad f(X) < 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Beweis. Es genügt nachzuweisen, daß die Annahmen

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N} \quad \text{und} \quad f(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N},$$

sowie die Annahmen

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N} \quad \text{und} \quad f(X) < 0 \bmod \mathsf{N}$$

unverträglich sind.

Für eine mod N positive Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ existieren eine Konstante $C > 0$ und eine Serie von Elementen $H_\nu \in \mathfrak{H}$, derart daß

$$g(X) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(XH_\nu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

Da dann für jedes Serie von Elementen $F_\mu \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} g(XF_\mu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

besteht, ist $g(X)$ weder eine Nilfunktion noch eine mod N negative Funktion.

Aus der Annahme $f(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N}$ würde folgen

$$g(X) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f^{H_\nu}(X) \equiv \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(X) \equiv f(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N};$$

aus der Annahme $f(X) < 0 \bmod \mathsf{N}$ würde folgen

$$g(X) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f^{H_\nu}(X) < 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse erhalten wir nunmehr

Lemma 4. *Die Menge $\Phi(\mathfrak{H}) = \mathsf{B}(\mathfrak{H})/\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ der Restklassen des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ nach dem Teilraum $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ der Nilfunktionen ist ein geordneter linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen unter folgenden Festsetzungen:*

1. *Für jedes Paar von Restklassen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathfrak{H})$ und jedes Paar reeller Zahlen a_1, a_2 bezeichne die lineare Verbindung*

$$\varphi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2$$

die Restklasse aller Funktionen

$$f(X) = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) \quad \textit{mit} \quad f_1(X) \in \varphi_1 \quad \textit{und} \quad f_2(X) \in \varphi_2.$$

2. *Für ein Paar von Restklassen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathfrak{H})$ bestehe die Ordnungsbeziehung*

$$\varphi_1 < \varphi_2 \quad (\textit{oder } \varphi_2 > \varphi_1),$$

wenn die Beziehung

$$f_1(X) < f_2(X) \bmod \mathsf{N} \quad \textit{für jedes } f_1(X) \in \varphi_1 \textit{ und } f_2(X) \in \varphi_2$$

besteht.

Die Eindeutigkeit der in diesem Lemma gegebenen Erklärungen ist durch das Lemma 2 bzw. das Lemma 3 gesichert.

Eine Restklasse $\varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$ bezeichnen wir auch als eine *Hyperfunktion*. Insbesondere bezeichne in diesem Zusammenhang die reelle Zahl a stets diejenige Hyperfunktion aus $\Phi(\mathfrak{H})$, der die Zahl a (als konstante Funktion über $\mathfrak{H}$) angehört; demgemäß bezeichnet 0 die Klasse $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ der Nilfunktionen aus $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$.

Die Ordnungsbeziehung im Hyperfunktionenraum $\Phi(\mathfrak{H})$ wird durch die nachstehend aufgeführten Eigenschaften gekennzeichnet, die aus den bisherigen Ergebnissen leicht hergeleitet werden können:

1. *Aus* $\varphi_1 < \varphi_2$ *und* $\varphi_2 < \varphi_3$ *folgt* $\varphi_1 < \varphi_3$.

2. *Aus* $\varphi_1 < \varphi_2$ *folgt* $a\,\varphi_1 < a\,\varphi_2$ *für jede reelle Zahl* $a > 0$.

3. *Aus* $\varphi_1 < \psi_1$ *und* $\varphi_2 < \psi_2$ *folgt* $\varphi_1 + \varphi_2 < \psi_1 + \psi_2$.

4. *Für jede Hyperfunktion* $\varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$ *besteht höchstens eine der drei Beziehungen*

$$\varphi > 0; \quad \varphi = 0; \quad \varphi < 0.$$

Weiter erhalten wir das wichtige

Lemma 4*. *Jede Hyperfunktion* $\varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$ *ist beschränkt, d.h. es existieren reelle Konstante* c *und* C, *derart daß die Ungleichungen*

$$c < \varphi < C$$

bestehen.

Beweis. Ist δ eine beliebige positive reelle Zahl und $f(X)$ eine beliebige (beschränkte) Funktion aus der Hyperfunktion $\varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$, so existieren Konstante c und C, derart daß

$$c + \delta < f(X) < C - \delta \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

Da dann auch für jedes Paar von Elementen $X, H_1 \in \mathfrak{H}$

$$0 < \delta < f(XH_1) - c \quad \text{und} \quad 0 < \delta < C - f(XH_1),$$

folgt

$$c < f(X) \bmod \mathsf{N} \quad \text{und} \quad f(X) < C \bmod \mathsf{N}$$

und damit $c < \varphi < C$.

3.

Der Beweis des Satzes 4* ist ein fast unmittelbare Folgerung aus dem

Lemma 5. *Der Hyperfunktionenraum* $\Phi(\mathfrak{H})$ *besitzt ein (reellwertiges) Maß*

$$M\colon\ \varphi \to M(\varphi) \quad \text{für jedes } \varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$$

mit den Eigenschaften:

1. *Für jedes Paar von Hyperfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathfrak{H})$ *und jedes Paar reeller Zahlen* a_1, a_2 *besteht die Gleichung*

$$M(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M(\varphi_1) + a_2 M(\varphi_2).$$

2. *Genügen zwei Hyperfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathfrak{H})$ *der Ordnungsbeziehung* $\varphi_1 < \varphi_2$, *so besteht die Ungleichung*

$$M(\varphi_1) \leqq M(\varphi_2).$$

3. *Für jede konstante Hyperfunktion* $c \in \Phi(\mathfrak{H})$ *besteht die Gleichung*

$$M(c) = c.$$

Nach Beweis dieses Lemma liefert die Zuordnung

$$f(X) \to M(f) = M(\varphi) \quad \text{für jede Funktion } f(X) \in \varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$$

ein additives Maß des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ über der Halbgruppe $\mathfrak{H}$, da aus der für jede Funktion $f(X)$ und jedes Element $H \in \mathfrak{H}$ gültigen Kongruenz

$$f^H(X) \equiv f(X) \bmod \mathsf{N}$$

auch die Invarianzbedingung

$$M(f^H) = M(f)$$

gewonnen wird.

Unter einem Teilraum Ω des Hyperfunktionenraumes $\Phi(\mathfrak{H})$ der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ verstehen wir in gewohnter Weise einen linearen Teilraum, also eine Teilmenge von $\Phi(\mathfrak{H})$ mit der Eigenschaft:

Für jedes Paar von Hyperfunktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega$ und jedes Paar reeller Zahlen a_1, a_2 gehört die lineare Verbindung $\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ zur Menge Ω.

Insbesondere bilden die konstanten Hyperfunktionen aus $\Phi(\mathfrak{H})$ einen Teilraum Ω_0 von $\Phi(\mathfrak{H})$.

Ist Ω ein beliebiger Teilraum des Raumes $\Phi(\mathfrak{H})$ und ψ eine nicht zu Ω gehörende Hyperfunktion aus $\Phi(\mathfrak{H})$, so bezeichne $\Omega(\psi)$ den von allen linearen Verbindungen

$$\varphi = \varphi_0 + c\psi \quad \text{mit} \quad \varphi_0 \in \Omega$$

gebildeten Teilraum in $\Phi(\mathfrak{H})$. Daß $\Omega(\psi)$ in der Tat Teilraum von $\Phi(\mathfrak{H})$ ist, leuchtet unmittelbar ein. Die angegebene Darstellung einer Hyperfunktion $\varphi \in \Omega(\psi)$ ist überdies eindeutig, da eine Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 + c\psi = \varphi_0' + c'\psi \quad \text{mit} \quad \varphi_0, \varphi_0' \in \Omega$$

im Falle $c \neq c'$ auf

$$\psi = \frac{1}{c - c'}(\varphi_0' - \varphi_0) \in \Omega$$

führen würde, während im Falle $c = c'$ auch die Gleichung $\varphi_0 = \varphi_0'$ folgt.

Wir wählen nun zum Beweise des Lemma 5 im Hyperfunktionenraum $\Phi(\mathfrak{H})$ eine *aufsteigend wohlgeordnete Kette* (Ω_ν) von Teilräumen aus mit folgenden Eigenschaften:

1. *Es sei Ω_0 der Teilraum aller konstanten Hyperfunktionen aus $\Phi(\mathfrak{H})$.*
2. *Es sei*

$$\Omega_\nu \subset \Omega_{\nu+1} = \Omega_\nu(\psi_{\nu+1}) \quad \textit{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\Omega_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \Omega_\nu \qquad \textit{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma.$$

3. *Es sei $\Omega_\sigma = \Phi(\mathfrak{H})$.*

Dabei bezeichnet Λ eine geeignet gewählte, wohlgeordnete Indexmenge von der Mächtigkeit des Raumes $\Phi(\mathfrak{H})$.

Der Beweis der Möglichkeit einer solchen Auswahl läßt sich leicht erbringen mittels einer Wohlordnung

$$(\varphi):\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}, \ldots$$

aller Hyperfunktionen $\varphi_\nu \in \Phi(\mathfrak{H})$. Zunächst sei Ω_0 der Teilraum der konstanten Hyperfunktionen aus $\Phi(\mathfrak{H})$. Sind für einen Index $\lambda \in \Lambda$ sämtliche Teilräume Ω_ν mit einem Index $\nu < \lambda$ gemäß der angegebenen Vorschrift ausgewählt, so setze man für einen Limesindex λ

$$\Omega_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \Omega_\nu .$$

Offenbar ist diese Vereinigung Teilraum in $\Phi(\mathfrak{H})$. Ist aber λ nicht Limesindex und ψ_λ die erste nicht zum Teilraum $\Omega_{\lambda-1}$ gehörende Hyperfunktion in der Wohlordnung (φ), so setze man

$$\Omega_\lambda = \Omega_{\lambda-1}(\psi_\lambda) .$$

Diese Konstruktion läßt sich so lange fortsetzen, bis die Gleichung

$$\Omega_\sigma = \Phi(\mathfrak{H})$$

eintritt.

Wir zeigen nun durch transfinite Induktion, daß für jeden Teilraum Ω_λ der Kette (Ω_ν) ein *additives Maß* $M_\lambda(\varphi)$ als reellwertige Funktion erklärt werden kann mit folgenden Eigenschaften:

1. *Für jedes Paar von Hyperfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_\lambda$ *und jedes Paar reeller Zahlen* a_1, a_2 *besteht die Gleichung*

$$M_\lambda(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M_\lambda(\varphi_1) + a_2 M_\lambda(\varphi_2) .$$

2. *Genügen zwei Hyperfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_\lambda$ *der Ordnungsbeziehung* $\varphi_1 < \varphi_2$, *so besteht die Ungleichung*

$$M_\lambda(\varphi_1) \leqq M_\lambda(\varphi_2) .$$

3. *Für jede Hyperfunktion* $\varphi \in \Omega_\nu$ *mit einem Index* $\nu < \lambda$ *besteht die Gleichung*

$$M_\nu(\varphi) = M_\lambda(\varphi) .$$

Im Teilraum Ω_0 der konstanten Hyperfunktionen aus $\Phi(\mathfrak{H})$ setzen wir fest

$$M_0(c) = c .$$

Offenbar besitzt dieses Maß $M_0(\varphi)$ sämtliche geforderten Eigenschaften. Zur Durchführung der transfiniten Induktion dürfen wir daher annehmen, für jeden Index $\varkappa < \lambda$ sei bereits ein additives Maß $M_\varkappa(\varphi)$ mit den verlangten Eigenschaften bestimmt.

1. Im Falle eines Limesindex λ erkläre man für den Teilraum

$$\Omega = \bigcup_{\nu<\lambda} \Omega_\nu$$

die Funktion

$$M_\lambda(\varphi) = M_\varkappa(\varphi), \quad \text{wenn } \varphi \in \Omega_\varkappa \text{ mit einem Index } \varkappa < \lambda.$$

Der Wert $M_\lambda(\varphi)$ ist eindeutig bestimmt, da im Falle

$$\varphi \in \Omega_\varkappa \cap \Omega_\mu \quad \text{mit Indizes } \varkappa < \lambda \text{ und } \mu < \lambda$$

die Gleichung

$$M_\varkappa(\varphi) = M_\mu(\varphi)$$

besteht. Gehören die Hyperfunktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_\lambda$ dem Teilraum $\Omega_\varkappa$ mit einem Index $\varkappa < \lambda$ an, so gilt das Gleiche für jede lineare Verbindung $\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$. Aus der Gleichung

$$M_\varkappa(\varphi) = M_\varkappa(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M_\varkappa(\varphi_1) + a_2 M_\varkappa(\varphi_2)$$

folgt

$$M_\lambda(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M_\lambda(\varphi_1) + a_2 M_\lambda(\varphi_2).$$

In gleicher Weise erhalten wir für zwei Hyperfunktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_\lambda$, die dem Teilraum $\Omega_\varkappa$ mit einem Index $\varkappa < \lambda$ angehören und der Ordnungsbeziehung $\varphi_1 < \varphi_2$ genügen, die Ungleichung

$$M_\varkappa(\varphi_1) \leqq M_\varkappa(\varphi_2),$$

also auch

$$M_\lambda(\varphi_1) \leqq M_\lambda(\varphi_2).$$

Schließlich besteht für jede konstante Hyperfunktion $c \in \Omega_0 \leqq \Omega_\lambda$ die Gleichung

$$M_\lambda(c) = M_0(c) = c.$$

2. Ist λ nicht Limesindex, so ist im Teilraum $\Omega_{\lambda-1}$ ein additives Maß $M_{\lambda-1}(\varphi)$ mit den verlangten Eigenschaften bestimmt. Der Teilraum

$$\Omega_\lambda = \Omega_{\lambda-1}(\psi) \quad \text{mit} \quad \psi = \psi_\lambda \notin \Omega_{\lambda-1}$$

besteht aus sämtlichen Hyperfunktionen der Gestalt

$$\varphi = \varphi_0 + c\psi \quad \text{mit} \quad \varphi_0 \in \Omega_{\lambda-1}$$

(in eindeutig bestimmter Darstellung). Nach Lemma 4* exisitieren Hyperfunktionen $\gamma \in \Omega_{\lambda-1}$, die der Ordnungsbeziehung

$$\psi < \gamma$$

genügen. Demgemäß setzen wir

$$M_\lambda(\psi) = \inf_{\psi < \gamma \in \Omega_{\lambda-1}} M_{\lambda-1}(\gamma)$$

und weiter

$$M_\lambda(\varphi) = M_\lambda(\varphi_0 + c\psi) = M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c\, M_\lambda(\psi).$$

Da die Darstellung $\varphi = \varphi_0 + c\psi$ der Hyperfunktion $\varphi \in \Omega_\lambda$ mit $\varphi_0 \in \Omega_{\lambda-1}$ eindeutig ist, wird durch diese Festsetzung eine eindeutige Funktion im Teilraum $\Omega_\lambda = \Omega_{\lambda-1}(\psi)$ erklärt.

Für jedes Paar von Hyperfunktionen

$$\varphi' = \varphi_0' + c'\psi; \quad \varphi'' = \varphi_0'' + c''\psi \quad \text{mit} \quad \varphi_0', \varphi_0'' \in \Omega_{\lambda-1}$$

aus dem Teilraum Ω_λ und ihre lineare Verbindung

$$\varphi = a_1\varphi' + a_2\varphi'' = a_1\varphi_0' + a_2\varphi_0'' + (a_1 c' + a_2 c'')\,\psi \quad \text{mit} \quad a_1\varphi_0' + a_2\varphi_0'' \in \Omega_{\lambda-1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} M_\lambda(\varphi) &= M_{\lambda-1}(a_1\varphi_0' + a_2\varphi_0'') + (a_1 c' + a_2 c'')\,M_\lambda(\psi) \\ &= a_1\big(M_{\lambda-1}(\varphi_0') + c' M_\lambda(\psi)\big) + a_2\big(M_{\lambda-1}(\varphi_0'') + c'' M_\lambda(\psi)\big) \\ &= a_1 M_\lambda(\varphi') + a_2 M_\lambda(\varphi''). \end{aligned}$$

Genügt die Hyperfunktion $\varphi = \varphi_0 + c\,\psi \in \Omega_\lambda$ mit $\varphi_0 \in \Omega_{\lambda-1}$ der Ordnungsbeziehung

$$0 < \varphi_0 + c\,\psi = \varphi,$$

so erhalten wir im Falle $c = 0$

$$M_\lambda(\varphi) = M_{\lambda-1}(\varphi_0) \geqq 0.$$

Im Falle $c > 0$ erhalten wir für jede Funktion $\gamma \in \Omega_{\lambda-1}$, die der Beziehung $\psi < \gamma$ genügt,

$$0 < \varphi_0 + c\,\psi < \varphi_0 + c\,\gamma,$$

also

$$0 \leqq M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c\,M_{\lambda-1}(\gamma)$$

und infolgedessen

$$0 \leqq M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c \inf_{\psi < \gamma} M_{\lambda-1}(\gamma) = M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c\,M_\lambda(\psi) = M_\lambda(\varphi).$$

Im Falle $c < 0$ erhalten wir

$$-c\,\psi < \varphi_0, \quad \text{d.h.} \quad \psi < \frac{1}{-c}\,\varphi_0,$$

also

$$M_\lambda(\psi) \leqq M_{\lambda-1}\Big(\frac{1}{-c}\,\varphi_0\Big)$$

und damit

$$0 \leqq M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c\,M_\lambda(\psi) = M_\lambda(\varphi).$$

Schließlich erhalten wir für jede Hyperfunktion $\varphi_0 \in \Omega_\varkappa$ mit einem Index $\varkappa < \lambda$ oder $\varkappa \leqq \lambda - 1$ nach Induktionsannahme

$$M_\lambda(\varphi_0) = M_{\lambda-1}(\varphi_0) = M_\varkappa(\varphi_0).$$

Auf Grund der Gleichung $\Omega_\sigma = \Phi(\mathfrak{H})$ stellt nun die Funktion

$$M(\varphi) = M_\sigma(\varphi) \quad \text{für jedes } \varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$$

das gesuchte Maß des Hyperfunktionsraumes $\Phi(\mathfrak{H}) = \mathsf{B}(\mathfrak{H})/\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ dar. Damit ist das Lemma 5, also auch der Satz 4* vollständig bewiesen.

3*.

Eine nähere Betrachtung der Beweisführung zum Satze 4* zur Feststellung, inwieweit sie von der Kommutativität der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ tatsächlich abhängt, zeigt sogleich, daß Vertauschungen von Elementen aus $\mathfrak{H}$ nur im Verlauf der Beweise zu den Lemmata 1 und 3 vorgenommen werden mußten, während

der Beweis des wichtigsten Lemma 5 von der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ überhaupt unabhängig ist, da in ihm der Hyperfunktionenraum $\Phi(\mathfrak{H})$ lediglich in seiner Eigenschaft als (teilweise geordneter) linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen auftritt.

In diesem Abschnitt will ich nun ergänzend zeigen, daß in der Tat die Voraussetzung der Kommutativität nicht völlig ausgenutzt wird und daher durch eine schwächere Voraussetzung ersetzt werden kann. Um die Dinge durchsichtiger darstellen zu können, nehme ich zunächst eine einfache, aber zweckmäßige Erweiterung der vorgegebenen (nicht notwendig abelschen) Halbgruppe $\mathfrak{H}$ vor.

Die Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ aller (formalen) *linearen Mittel*

$$\mathfrak{a} = \sum_X a(X)\, X \qquad \text{(über } X \in \mathfrak{H}\text{)}$$

in der Halbgruppe $\mathfrak{H}$, gebildet mit nichtnegativen rationalen Zahlen $a(X)$ der Summe

$$\sum_X a(X) = 1 \qquad \text{(über } X \in \mathfrak{H}\text{)},$$

unter denen jeweils nur endlich viele von Null verschieden sind, ist, wie man sich leicht überlegt, eine Halbgruppe, die *Mittelhalbgruppe* $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *über der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$, *unter* folgenden Festsetzungen:

1. *Es gelte*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \text{d.h.} \quad \sum_X a(X)\, X = \sum_X b(X)\, X$$

dann und nur dann, wenn

$$a(X) = b(X) \quad \textit{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

2. *Für jedes geordnete Paar von Elementen*

$$\mathfrak{a} = \sum_X a(X)\, X; \qquad \mathfrak{b} = \sum_Y b(Y)\, Y \qquad \textit{(über } X, Y \in \mathfrak{H}\textit{)}$$

der Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *sei*

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \sum_{X,Y} a(X)\, b(Y)\, XY = \sum_Z \Big(\sum_{XY=Z} a(X)\, b(Y) \Big) Z.$$

Jedes Element $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ besitzt dann eine (im wesentlichen eindeutige) Darstellung

$$\mathfrak{a} = a_1 H_1 + a_2 H_2 + \cdots + a_m H_m$$

mit paarweise verschiedenen Elementen $H_1, H_2, \ldots, H_m \in \mathfrak{H}$ und positiven rationalen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ der Summe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1.$$

Da insbesondere die Elemente $1.\, H = H \in \mathfrak{H}$ selbst der Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ angehören, ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ eine Erweiterung der Halbgruppe $\mathfrak{H}$.

Für jede beschränkte Funktion $f(X)$ des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ über der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ bestimmt nun jedes Element $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ eine Mittelfunktion $f^{\mathfrak{a}}(X)$ durch die Festsetzung

$$f^{\mathfrak{a}}(X) = f(X\mathfrak{a}) = \sum_H a(H) f^H(X) = \sum_H a(H) f(XH).$$

Dabei besteht die Regel:

Für jedes geordnete Paar von Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *und jede Funktion* $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *besteht die Gleichung*

$$f^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(X) = g^{\mathfrak{a}}(X) \quad mit \quad g(X) = f^{\mathfrak{b}}(X).$$

Unter der hier vorgenommenen Vereinfachung der Bezeichnung ist, wie man sofort erkennt, nach der im Abschnitt 2 gegebenen Definition die Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ genau dann eine Nilfunktion, wenn sich zu jedem reellen Wert $\varepsilon > 0$ ein Element $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\varepsilon)$ der Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ angeben läßt, derart daß für jedes $X \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$|f(X\mathfrak{a})| < \varepsilon$$

besteht. In diesem Falle gilt auch für jedes Element $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$

$$|f(X\mathfrak{x}\mathfrak{a})| < \varepsilon.$$

Denn aus der Ungleichung

$$|f(X\mathfrak{a})| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

folgt

$$|f(XH\mathfrak{a})| < \varepsilon \quad \text{für jedes Paar } X, H \in \mathfrak{H}$$

und damit für jedes Element

$$\mathfrak{x} = \sum_H x(H) H$$

der Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$|f(X\mathfrak{x}\mathfrak{a})| = \Big|\sum_{H,G} x(H)\, a(G)\, f(XHG)\Big| \leqq \sum_H x(H) \Big|\sum_G a(G) f(XHG)\Big|$$
$$= \sum_H x(H)\, |f(XH\mathfrak{a})| < \varepsilon \sum_H x(H) = \varepsilon.$$

Ist demnach $f(X)$ eine Nilfunktion aus $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$, also

$$|f(X\mathfrak{a})| < \varepsilon,$$

so gilt für jedes $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ auch

$$|f(X\mathfrak{b}\mathfrak{a})| < \varepsilon.$$

Mithin ist auch die Transformierte

$$f(X\mathfrak{b}) = f^{\mathfrak{b}}(X) \quad \text{für jedes } \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$$

eine Nilfunktion.

Zum Beweise des Lemma 1 bleibt somit noch nachzuweisen:

Sind $f(X), g(X)$ *Nilfunktionen aus* $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$, *so ist jede lineare Verbindung* $h(X) = af(X) + bg(X)$ *eine Nilfunktion.*

Nach Voraussetzung existieren Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, derart daß die Ungleichungen

$$|f(X\,\mathfrak{a})| < \varepsilon; \quad |g(X\,\mathfrak{b})| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

also auch für jedes Paar von Elementen $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ungleichungen

$$|f(X\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a})| < \varepsilon; \quad |g(X\,\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b})| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

bestehen. Lassen sich die Elemente $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ derart wählen, daß eine Gleichung

$$\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$$

eintritt, so bestehen zugleich die Ungleichungen

$$|f(X\,\mathfrak{c})| < \varepsilon; \quad |g(X\,\mathfrak{c})| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

aus denen nun die Folgerung

$$|h(X\,\mathfrak{c})| = |a\,f(X\,\mathfrak{c}) + b\,g(X\,\mathfrak{c})| < (|a| + |b|)\,\varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

gezogen werden kann.

Jede abelsche Halbgruppe $\mathfrak{H}$ besitzt eine abelsche Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$; in diesem Falle kann die Gleichung

$$\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b} \quad \text{durch} \quad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}; \quad \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}$$

stets gelöst werden. Im nichtabelschen Falle muß die Lösbarkeit als Forderung gestellt werden:

(**F**) *Die Mittelhalbgruppe* $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *besitze die Eigenschaft*:

Zu jedem Paar von Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *existiert ein Paar von Elementen* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, *derart daß die Gleichung*

$$\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}$$

besteht.

Dann gilt, wie wir soeben zeigten:

Lemma 1*. *Die Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *genüge der Forderung* (**F**). *Dann ist die Menge* $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ *aller Nilfunktionen ein* $\mathfrak{H}$*-invarianter Teilraum des Funktionenraumes* $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$.

Die Beweise der Lemmata 2 und 2* lassen sich ohne Änderung auf Halbgruppen übertragen, die der Forderung (**F**) genügen. Demgemäß bedeute die Kongruenz

$$f(X) \equiv g(X) \bmod \mathsf{N},$$

daß die Differenz $f(X) - g(X)$ der Funktionen $f(X), g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ eine Nilfunktion ist. Dieser Kongruenzbegriff besitzt alle in den Lemmata 2 und 2* angegebenen Eigenschaften.

Eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ ist nach der Definition des Abschnittes 2 positiv mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$:

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N},$$

wenn eine reelle Zahl $C>0$ und ein Element $\mathfrak{a}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ existiert, derart daß die Ungleichung

$$f(X\mathfrak{a})\geqq C>0 \quad \text{für jedes } X\in\mathfrak{H}$$

besteht. Daraus folgt für jedes Element

$$\mathfrak{x}=\sum_H x(H)\,H$$

der Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$f(X\mathfrak{x}\mathfrak{a})=\sum_H x(H)\,f(XH\mathfrak{a})\geqq C\sum_H x(H)=C>0.$$

Mithin gilt (entsprechend dem Lemma 3):

Aus $f(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $f(X\mathfrak{a})>0 \bmod \mathsf{N}$ *für jedes* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$.

Aus $f(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $af(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *für jedes* $a>0$.

Zum Beweis des Lemma 3 bleibt somit noch nachzuweisen:

Aus $f(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $f(X)+g(X)>0 \bmod \mathsf{N}$.

Aus $f(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X)\equiv 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $f(X)+g(X)>0 \bmod \mathsf{N}$.

Beweis. Bestehen für mod N positive Funktionen $f(X), g(X)\in\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit geeigneten Elementen $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ungleichungen

$$f(X\mathfrak{a})\geqq C>0; \quad g(X\mathfrak{b})\geqq D>0 \quad \text{für jedes } X\in\mathfrak{H},$$

so gilt für jedes Paar von Elementen $\mathfrak{a}_0,\mathfrak{b}_0\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ auch

$$f(X\mathfrak{b}_0\mathfrak{a})\geqq C>0; \quad g(X\mathfrak{a}_0\mathfrak{b})\geqq D>0,$$

also im Falle der Gleichung

$$\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$$

die Ungleichung

$$f(X\mathfrak{c})+g(X\mathfrak{c})\geqq C+D>0.$$

Für eine mod N positive Funktion $f(X)\in\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ und eine Nilfunktion $g(X)\in\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ läßt sich eine Konstante $C>0$ und ein Element $\mathfrak{a}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, dann aber auch ein Element $\mathfrak{b}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ derart angeben, daß zugleich die Ungleichungen

$$f(X\mathfrak{a})\geqq C>0 \quad \text{und} \quad |g(X\mathfrak{b})|<\frac{C}{2} \quad \text{für jedes } X\in\mathfrak{H}$$

bestehen. Da dann für jedes Paar von Elementen $\mathfrak{a}_0,\mathfrak{b}_0\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ auch die Ungleichungen

$$f(X\mathfrak{b}_0\mathfrak{a})\geqq C>0 \quad \text{und} \quad |g(X\mathfrak{a}_0\mathfrak{b})|<\frac{C}{2} \quad \text{für jedes } X\in\mathfrak{H}$$

gelten, kann im Falle der Gleichung

$$\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$$

wiederum die Folgerung

$$f(X\mathfrak{c})+g(X\mathfrak{c})\geqq C-\frac{C}{2}=\frac{C}{2}>0$$

gezogen werden.

Damit ist das Lemma 3 auch gültig für jede Halbgruppe $\mathfrak{H}$, die der Forderung (**F**) genügt. Die Beweise der weiteren Lemmata 3*, 4, 4* sowie 5 lassen sich nun ohne Änderung übernehmen. Der Satz 4* läßt sich daher in folgender Gestalt verallgemeinern:

Satz 4.** *Die Mittelhalbgruppe* $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *über der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *genüge der Forderung:*

(**F**) *Zu jedem Paar von Elementen* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *existiert ein Paar von Elementen* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, *das der Gleichung*

$$\mathfrak{b}_0 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}$$

genügt.

Dann besitzt der Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *über der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *ein additives Maß.*

Es muß freilich noch angemerkt werden, daß die Ausbeute dieses Satzes nicht sehr ergiebig ist, da die Meßbarkeit derjenigen nichtabelschen Gruppen $\mathfrak{G}$, für deren Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ ich bisher die Eigenschaft (**F**) nachweisen konnte, sich auf anderem Wege weit leichter beweisen läßt.

4.

Die Übertragungsmöglichkeiten der abstrakten Gruppeneigenschaft $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$, eine *meßbare Gruppe* zu sein, kennzeichnet der [8])

Satz 5. *Die abstrakte Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$ *ist eine Syloweigenschaft, d.h.:*

Jedes homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{U}}$ *einer jeden Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *einer meßbaren Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist meßbar.*

Ist $\mathfrak{N}$ *ein meßbarer Normalteiler einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit meßbarer Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, *so ist auch* $\mathfrak{G}$ *meßbar.*

Ist $\mathfrak{U}$ *eine meßbare Untergruppe,* $\mathfrak{N}$ *ein meßbarer Normalteiler in der Gruppe* $\mathfrak{G}$, *so ist das Kompositum* $\mathfrak{U}\mathfrak{N}$ *eine meßbare Untergruppe in* $\mathfrak{G}$.

Die Vereinigung $\mathfrak{V}$ *einer Kette* $\mathsf{K} = (\mathfrak{U})$ *meßbarer Untergruppen einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist meßbare Untergruppe in* $\mathfrak{G}$.

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler einer meßbaren Gruppe $\mathfrak{G}$, so induziert jede beschränkte Funktion $\varphi(\mathfrak{N}X)$ aus dem Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine Funktion

$$f(X) = \varphi(\mathfrak{N}X) \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G}$$

des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$. Der in $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ erklärte Mittelwert

$$M_{\mathfrak{G}}(f) = M_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}(\varphi)$$

bestimmt auch, wie man leicht nachrechnet, einen Mittelwert im Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$.

[8]) Über Syloweigenschaften vgl. GT, Abschnitt 1.4.4.

2. Wird die meßbare Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Maß $\mu(\mathfrak{R})$ nach der Untergruppe $\mathfrak{U}$ in rechtsseitige Restklassen zerlegt:

$$\mathfrak{G} = \sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{U} \qquad (\text{über } \iota \in \mathfrak{l}),$$

so läßt sich einem Komplex $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{U}$ der Komplex

$$\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}$$

zuordnen. Man erkläre in $\mathfrak{U}$ die Funktion

$$\nu(\mathfrak{L}) = \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}\right).$$

Dann gilt

$$\nu(\mathfrak{U}) = \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{U}\right) = \mu(\mathfrak{G}) = 1,$$

$$\nu(\mathfrak{L}) = \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}\right) \geqq 0,$$

ferner für Komplexe $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{U}$ mit leerem Durchschnitt $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = 0$ wegen

$$\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}_1 \cap \sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}_2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}_1 \cup \sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}_2 = \sum_{\iota} A_\iota (\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2)$$

auch

$$\nu(\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2) = \nu(\mathfrak{L}_1) + \nu(\mathfrak{L}_2).$$

Schließlich erhalten wir für jedes Element $U \in \mathfrak{U}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \nu(\mathfrak{L}U) = \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}U\right) &= \mu\left(\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}\right) U\right) \\ &= \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}\right) = \nu(\mathfrak{L}). \end{aligned}$$

Mithin ist die Funktion $\nu(\mathfrak{L})$ ein Maß der Untergruppe $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{G}$.

3. Ist $\mathfrak{N}$ ein meßbarer Normalteiler mit dem Maß $\nu(\mathfrak{L})$ in einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so läßt sich jedem Komplex $\mathfrak{K}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ der reelle Wert

$$\mu_0(\mathfrak{K}) = \nu(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{N})$$

zuordnen. Dann gilt

$$\mu_0(\mathfrak{G}) = 1; \quad \mu_0(\mathfrak{K}) \geqq 0 \qquad \text{für jeden Komplex } \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$$

und für jedes Paar von Komplexen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{G}$ mit leerem Durchschnitt $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = 0$

$$\mu_0(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu_0(\mathfrak{K}_1) + \mu_0(\mathfrak{K}_2).$$

Ferner besteht für Elemente $X \equiv Y \bmod \mathfrak{N}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ wegen

$$\mathfrak{K}X \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{K}Y \cdot Y^{-1}X \cap \mathfrak{N} = (\mathfrak{K}Y \cap \mathfrak{N})\, Y^{-1}X \quad \text{mit} \quad Y^{-1}X \equiv E \bmod \mathfrak{N}$$

die Gleichung

$$\mu_0(\mathfrak{K}X) = \nu(\mathfrak{K}X \cap \mathfrak{N}) = \nu\left((\mathfrak{K}Y \cap \mathfrak{N})\, Y^{-1}X\right) = \nu(\mathfrak{K}Y \cap \mathfrak{N}) = \mu_0(\mathfrak{K}Y).$$

Infolgedessen liefern die Werte

$$f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N}X) = \mu_0(\mathfrak{R}X) \qquad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G}$$

zu jedem Komplex $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{G}$ eine beschränkte Funktion aus dem Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Im Falle der Meßbarkeit der Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist dann der Mittelwert

$$\mu(\mathfrak{R}) = M_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}(f_{\mathfrak{R}}),$$

wie man leicht nachweist, ein Maß der Gruppe $\mathfrak{G}$.

4. Ist $\mathfrak{U}$ meßbare Untergruppe, $\mathfrak{N}$ meßbarer Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist wegen der Isomorphie

$$\mathfrak{U}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$$

die Faktorgruppe $\mathfrak{U}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ als homomorphes Bild von $\mathfrak{U}$ meßbar. Da auch $\mathfrak{N}$ meßbar ist, folgt nach dem soeben in 3. Bewiesenen die Meßbarkeit des Kompositums $\mathfrak{U}\mathfrak{N}$.

Die letzte Aussage des Satzes 5 läßt eine wichtige Verallgemeinerung zu, die vom Begriff des Rasters einer Gruppe $\mathfrak{G}$ Gebrauch macht. Als *Raster* $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$ *einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ bezeichne ich jede Untergruppenmenge der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Element* $G \in \mathfrak{G}$ *gehört einer Untergruppe* $\mathfrak{V} \in \mathsf{P}$ *an.*

2. *Gehören die Untergruppen* $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ *der Menge* P *an, so gilt das Gleiche für das Kompositum* $\{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2\}$.

Auf Grund dieser Eigenschaften ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{V}$ des Rasters $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$. Beispielsweise ist die Menge aller endlicherzeugbaren Untergruppen einer Gruppe stets ein Raster dieser Gruppe. Wir bemerken ferner:

Lemma 6. *Jedes Raster* $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$ *einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist (hinsichtlich der Untergruppenkomposition) eine abelsche Halbgruppe.*

Beweis. Als Kompositum zweier Untergruppen $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ des Rasters P in der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2\}$ Untergruppe des Rasters P; dabei gilt

$$\{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2\} = \{\mathfrak{V}_2 \cup \mathfrak{V}_1\}$$

und für jedes Tripel von Untergruppen $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ des Rasters P das Assoziativgesetz

$$\{\{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2\} \cup \mathfrak{V}_3\} = \{\mathfrak{V}_1 \cup \{\mathfrak{V}_2 \cup \mathfrak{V}_3\}\} = \{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2 \cup \mathfrak{V}_3\}.$$

Es gilt der

Satz 5*. *Besitzt eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ein Raster* $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$ *aus meßbaren Untergruppen* $\mathfrak{V} < \mathfrak{G}$, *so ist auch* $\mathfrak{G}$ *meßbar.*

Bemerkung. Enthält eine Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Kette $\mathsf{K} = (\mathfrak{U})$ meßbarer Untergruppen $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$, so besitzt die Vereinigung $\mathfrak{V} = \bigcup \mathfrak{U}$ der Kette K das Raster $\mathsf{K} = (\mathfrak{U})$. Mithin ist $\mathfrak{V}$ meßbar. Die letzte Aussage des Satzes 5 ist daher Sonderfall des Satzes 5*.

Beweis. Besitzt die Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Raster $\mathsf{P} = (\mathfrak{P})$ aus meßbaren Untergruppen $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$, so besitzt jede Untergruppe $\mathfrak{P} \in \mathsf{P}$ ein Maß $\nu(\mathfrak{P}; \mathfrak{Q})$, das jedem Komplex $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ ein reelles Maß $\nu(\mathfrak{P}; \mathfrak{Q})$ zuordnet. Man erkläre in der Gruppe $\mathfrak{G}$ für einen beliebigen Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ und jede Untergruppe $\mathfrak{P} \in \mathsf{P}$ den Wert

$$\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}) = \nu(\mathfrak{P}; \mathfrak{P} \cap \mathfrak{K}).$$

Dann gilt, wie man sogleich erkennt,

$$\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{G}) = 1; \quad 0 \leqq \mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}) \leqq 1 \quad \text{für jeden Komplex } \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$$

und für jedes Paar von Komplexen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{G}$ mit leerem Durchschnitt $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = 0$

$$\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}_2).$$

Ferner erhalten wir für jeden Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ und jedes Element $G \in \mathfrak{G}$ die Gleichung

$$\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}G) = \mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}), \quad \text{sobald } G \in \mathfrak{P}.$$

Für einen vorgegebenen Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ stellt dann die Menge aller Werte $\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K})$ eine (beschränkte) Funktion über dem Raster $\mathsf{P} = (\mathfrak{P})$ dar, also eine Funktion aus dem Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ über der abelschen Halbgruppe P (im Sinne des Lemma 6).

Nach Satz 4* besitzt der Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ über der abelschen Halbgruppe P ein additives Maß $M(f)$, das jeder Funktion $f(\mathfrak{P}) \in \mathsf{B}(\mathsf{P})$ einen reellen Mittelwert $M(f)$ zuordnet. Wir erklären demgemäß für die Komplexe $\mathfrak{K}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Funktion

$$\mu(\mathfrak{K}) = M\big(\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K})\big).$$

Dann gilt wegen

$$\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{G}) = 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}) \leqq 1 \quad \text{für jeden Komplex } \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$$

zunächst

$$\mu(\mathfrak{G}) = 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \mu(\mathfrak{K}) \leqq 1 \quad \text{für jeden Komplex } \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$$

und wegen

$$\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K}_2) \qquad \text{im Falle } \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = 0$$

auch

$$\mu(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2).$$

Nach Satz 4* besteht für jedes Paar von Untergruppen $\mathfrak{U}, \mathfrak{P} \in \mathsf{P}$ und jeden Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ die Gleichung

$$M\big(\mu(\{\mathfrak{U} \cup \mathfrak{P}\}; \mathfrak{K})\big) = M\big(\mu(\mathfrak{P}; \mathfrak{K})\big).$$

Bestimmt man zu einem beliebig vorgegebenen Element $G \in \mathfrak{G}$ eine G enthaltende Untergruppe $\mathfrak{U} \in \mathsf{P}$, so besteht für jedes $\mathfrak{P} \in \mathsf{P}$ und jeden Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ die Gleichung

$$\mu(\{\mathfrak{U} \cup \mathfrak{P}\}; \mathfrak{K}G) = \mu(\{\mathfrak{U} \cup \mathfrak{P}\}; \mathfrak{K}) \qquad \text{wegen } G \in \{\mathfrak{U} \cup \mathfrak{P}\}.$$

Dann gilt aber auch

$$M\big(\mu\big(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}\};\,\mathfrak{K}G\big)\big)=M\big(\mu\big(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}\};\,\mathfrak{K}\big)\big),$$

andererseits

$$M\big(\mu\big(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}\};\,\mathfrak{K}G\big)\big)=M\big(\mu(\mathfrak{B};\,\mathfrak{K}G)\big)=\mu(\mathfrak{K}G),$$

$$M\big(\mu\big(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}\};\,\mathfrak{K}\big)\big)=M\big(\mu(\mathfrak{B};\,\mathfrak{K})\big)=\mu(\mathfrak{K})$$

und damit

$$\mu(\mathfrak{K}G)=\mu(\mathfrak{K}).$$

Mithin ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ meßbar.

Aus der Tatsache, daß die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft ist, lassen sich leicht weitere Folgerungen ziehen [9]). Jede nichtmeßbare Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält maximale meßbare Untergruppen, die wir als die $\mathfrak{m}$-*Sylowgruppen* der (nichtmeßbaren) Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wollen. Da jede zyklische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ (als abelsche Gruppe) meßbar ist, sind $\mathfrak{m}$-Sylowgruppen in nichtmeßbaren Gruppen von E verschieden.

Satz 6. *Jede nichtmeßbare Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält unendlich viele verschiedene $\mathfrak{m}$-Sylowgruppen. Jede $\mathfrak{m}$-Sylowgruppe $\mathfrak{S}_m$ in $\mathfrak{G}$ ist ihr eigener Normalisator:*

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{S}_m<\mathfrak{G})=\mathfrak{S}_m.$$

Der Durchschnitt $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_m=\bigcap\mathfrak{S}_m$ aller $\mathfrak{m}$-Sylowgruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist der maximale meßbare Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die meßbaren Normalteiler $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ bilden einen abgeschlossenen Verband; der maximale Normalteiler dieses Verbandes ist der Normalteiler $\mathfrak{M}_m<|\,\mathfrak{G}$.

Beweis. Eine $\mathfrak{m}$-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ der nichtmeßbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ ist Normalteiler des Normalisators $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})=\mathfrak{N}(\mathfrak{S}<\mathfrak{G})$. Wäre $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$ verschieden, so besäße die Faktorgruppe $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ eine zyklische Untergruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{S}$. Dann wären $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}/\mathfrak{S}$, also auch $\mathfrak{T}$ meßbare Gruppen, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\mathfrak{S}$ maximale meßbare Untergruppe in $\mathfrak{G}$ ist. Folglich besteht die Gleichheit $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}$.

Zerlegen wir nun die (nichtmeßbare) Gruppe $\mathfrak{G}$ in Restklassen

$$\mathfrak{G}=\sum_{\iota}\mathfrak{S}X_\iota\qquad(\text{über }\iota\in\mathfrak{l})$$

nach der $\mathfrak{m}$-Sylowgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_m$, so ist jede der Gruppen

$$\mathfrak{S}_\iota=X_\iota^{-1}\mathfrak{S}X_\iota$$

eine $\mathfrak{m}$-Sylowgruppe in $\mathfrak{G}$. Aus einer Gleichung

$$\mathfrak{S}_\iota=\mathfrak{S}_\varkappa,\quad\text{d.h.}\quad X_\iota^{-1}\mathfrak{S}X_\iota=X_\varkappa^{-1}\mathfrak{S}X_\varkappa$$

folgt

$$X_\iota X_\varkappa^{-1}\mathfrak{S}=\mathfrak{S}X_\iota X_\varkappa^{-1},\quad\text{d.h.}\quad X_\iota X_\varkappa^{-1}\in\mathfrak{N}(\mathfrak{S})=\mathfrak{S},\quad\text{also}\quad\iota=\varkappa.$$

Sämtliche $\mathfrak{m}$-Sylowgruppen $\mathfrak{S}_\iota=X_\iota^{-1}\mathfrak{S}X_\iota$ sind demnach verschieden.

[9]) Vgl. GT, Satz 1.4.28.

Wäre dabei $\mathfrak{S}$ von endlichem Index in $\mathfrak{G}$, so wäre nach dem Satze von H. POINCARÉ [10]) auch der Normalteiler

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_m = \bigcap_{\iota} \mathfrak{S}_\iota$$

von endlichem Index in $\mathfrak{G}$. Dann wären aber $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ (als endliche Gruppe), also auch $\mathfrak{G}$ selbst meßbar.

Die weiteren Aussagen des Satzes 6 sind allgemeingültig für beliebige Syloweigenschaften [11]).

5.

Nach den bisherigen Ergebnissen sind einerseits die endlichen Gruppen, andererseits die abelschen Gruppen meßbar. Mit Hilfe der Sätze 5 und 5* läßt sich nun auch die Meßbarkeit allgemeinerer Gruppentypen nachweisen.

Bezeichnen wir eine Gruppe $\mathfrak{G}$ als *klassenfinit*, wenn jede ihrer Ähnlichkeitsklassen aus endlich vielen Elementen besteht, so umfaßt der Typus der klassenfiniten Gruppe offensichtlich sowohl den Typus der endlichen, als auch den Typus der abelschen Gruppe. Es gilt der

Satz 7. *Jede klassenfinite Gruppe $\mathfrak{G}$ ist meßbar.*

Beweis. Da jedes Element G einer klassenfiniten Gruppe $\mathfrak{G}$ einem endlichen normalen Komplex $\mathfrak{K}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, nämlich seiner Ähnlichkeitsklasse in $\mathfrak{G}$ angehört, bilden die von sämtlichen endlichen normalen Komplexen $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{G}$ erzeugten Normalteiler $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{K}\}$ ein Normalteilerraster $\mathsf{P} = (\mathfrak{N})$ in $\mathfrak{G}$. Nach Satz 5* ist folglich nur zu zeigen, daß diese endlicherzeugbaren Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ meßbar sind.

Es sei also $\mathfrak{K} = (K_1, K_2, \ldots, K_s)$ ein endlicher normaler Komplex aus der klassenfiniten Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{K}\}$ sein Erzeugnis. Da jedes Element $K_\sigma \in \mathfrak{K}$ einer endlichen Ähnlichkeitsklasse von $\mathfrak{G}$ angehört, ist der Zentralisator $\mathfrak{Z}_\sigma = \mathfrak{Z}(K_\sigma)$ des Elementes K_σ in $\mathfrak{G}$ von endlichem Index

$$1 \leqq \operatorname{ind}(\mathfrak{G} : \mathfrak{Z}_\sigma) = k_\sigma \qquad \text{für } 1 \leqq \sigma \leqq s.$$

Nach dem bereits erwähnten Satze von H. POINCARÉ ist dann auch der Durchschnitt

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{\sigma=1}^{s} \mathfrak{Z}_\sigma$$

Normalteiler in $\mathfrak{G}$ von endlichem Index

$$1 \leqq \operatorname{ind}(\mathfrak{G} : \mathfrak{D}) = k.$$

Mithin ist der Durchschnitt $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}$ Normalteiler in $\mathfrak{N}$ von endlichem Index

$$1 \leqq \operatorname{ind}(\mathfrak{N} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}) \leqq \operatorname{ind}(\mathfrak{G} : \mathfrak{D}) = k.$$

---

[10]) Vgl. GT, Satz 1.2.15.
[11]) Vgl. GT, Satz 1.4.28.

Da der Normalteiler $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{G}$ mit dem Komplex $\mathfrak{K}$, also mit dem Erzeugnis $\mathfrak{N}=\{\mathfrak{K}\}$ elementweise vertauschbar ist, ist der Durchschnitt $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}$ das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ des Normalteilers $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$. Die Gruppe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}$ ist als abelsche Gruppe, die Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}$ als endliche Gruppe meßbar. Nach Satz 5 ist dann auch $\mathfrak{N}$ meßbar.

Die weiteren Entwicklungen müssen sich auf allgemeinere Betrachtungen über abstrakte Gruppeneigenschaften stützen, die auch an sich vielleicht nicht ohne Interesse sind. Eine abstrakte Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ kann als eine zweiwertige Funktion

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=\begin{cases}1, \text{ d.h. } \mathfrak{G} \text{ ist eine } \mathfrak{e}\text{-Gruppe},\\ 0, \text{ d.h. } \mathfrak{G} \text{ ist keine } \mathfrak{e}\text{-Gruppe},\end{cases}$$

aufgefaßt werden, die isomorphen Gruppen $\mathfrak{G}\cong\mathfrak{G}^*$ den gleichen Wert $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=\mathfrak{e}(\mathfrak{G}^*)$ zuordnet. Die (abstrakte) Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ möge im folgenden als *vollvererbbar* bezeichnet werden, wenn sie der Forderung genügt:

Jedes homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{U}}$ *einer jeden Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *einer* $\mathfrak{e}$*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist gleichfalls eine* $\mathfrak{e}$*-Gruppe.*

Beispiele. 1. Die Gruppeneigenschaft $f(\mathfrak{G})$, eine *endliche Gruppe* zu sein, ist vollvererbbar.

2. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$, eine *abelsche Gruppe* zu sein, ist vollvererbbar.

3. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$, eine *klassenfinite Gruppe* zu sein, ist vollvererbbar [12]).

4. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$, eine *meßbare Gruppe* zu sein, ist vollvererbbar.

Zwischen Gruppeneigenschaften $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{c}'(\mathfrak{G})$ bestehe die *Ordnungsrelation*

$$\mathfrak{c}\leqq\mathfrak{c}',$$

wenn für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ungleichung

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{G})\leqq\mathfrak{e}'(\mathfrak{G})$$

besteht, d.h. wenn jede $\mathfrak{c}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ auch eine $\mathfrak{c}'$-Gruppe ist. Für die Relation $\mathfrak{e}\leqq\mathfrak{e}'$ setzen wir $\mathfrak{c}<\mathfrak{c}'$, wenn wenigstens eine Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert, die der Bedingung

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=0;\qquad \mathfrak{e}'(\mathfrak{G})=1$$

genügt. Wenn gleichzeitig die Ordnungsrelationen

$$\mathfrak{e}\leqq\mathfrak{e}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{e}'\leqq\mathfrak{e}$$

bestehen, sind die beiden Gruppeneigenschaften wegen der Gleichung

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=\mathfrak{e}'(\mathfrak{G}) \qquad \text{für jede Gruppe } \mathfrak{G}$$

als *gleichwertig* zu bezeichnen. Offenbar gilt die Regel:

[12]) Vgl. GT, Abschnitt 1.4.5.

Aus $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{e}'$ *und* $\mathfrak{e}' \leqq \mathfrak{e}''$ *folgt* $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{e}''$.

Beispiel. Die Aussagen der Sätze 2, 4 und 7 lassen sich durch die Ordnungsrelationen

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}$$

darstellen.

Aus einer beliebigen vollvererbbaren Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ lassen sich nun durch die beiden nachfolgend erklärten Prinzipe weitere Gruppeneigenschaften ableiten:

Prinzip der Lokalisierung.

$\mathfrak{l}\mathfrak{e}(\mathfrak{G}) = 1$: *Jede endlicherzeugbare Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist eine* $\mathfrak{e}$*-Gruppe.* Oder: *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist eine lokale* $\mathfrak{e}$*-Gruppe.*

Prinzip der (transfiniten) Erweiterung.

$\mathfrak{n}\mathfrak{e}(\mathfrak{G}) = 1$: *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *besitzt eine Normalfolge* $(\mathfrak{U}_\nu)$, *deren Faktoren* $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ *sämtlich* $\mathfrak{e}$*-Gruppen sind.* Oder: *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist eine Meta-*$\mathfrak{e}$*-Gruppe.*

Als *Normalfolge der Gruppe* $\mathfrak{G}$ werde dabei eine (aufsteigend wohlgeordnete) Untergruppenkette $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset\!| \, \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{G} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

in der Gruppe $\mathfrak{G}$, als ihre Faktoren die Faktorgruppen $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ aufeinanderfolgender Glieder der Kette bezeichnet [13]).

Beispiele. Es bedeutet demgemäß $\mathfrak{l}\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *lokalendliche Gruppe* zu sein, $\mathfrak{n}\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *metafinite Gruppe* [14]) zu sein, $\mathfrak{n}\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *metabelsche Gruppe* [15]) zu sein. Analog ist eine $\mathfrak{l}\mathfrak{k}$-Gruppe als eine *lokalklassenfinite Gruppe* zu bezeichnen.

Wir stellen fest:

Lemma 6. *Ist* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *eine vollvererbbare Gruppeneigenschaft, so sind auch die abgeleiteten Gruppeneigenschaften* $\mathfrak{l}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *und* $\mathfrak{n}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *vollvererbbar.*

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{V}$ einer beliebigen Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ ist dann (als Untergruppe von $\mathfrak{G}$) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Mithin ist auch $\mathfrak{H}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe.

In der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nach einem beliebigen Normalteiler $\mathfrak{N} \subseteq\!| \, \mathfrak{G}$ ist jede endlicherzeugbare Untergruppe homomorphes Bild $\mathfrak{U}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ einer endlicherzeugbaren Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$. Mit $\mathfrak{U}$ ist daher auch $\mathfrak{U}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, also $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe.

[13]) Unter Λ ist hier und im folgenden eine wohlgeordnete Indexmenge hinreichend großer Mächtigkeit zu verstehen.

[14]) Vgl. W. Specht: Beiträge zur Gruppentheorie I, Lokalendliche Gruppen. Math. Nachr. **18**, 39–56 (1958).

[15]) Vgl. GT, Abschnitt 3.1.4.

Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{l}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ ist somit vollvererbbar.

2. Die $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze die Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{G} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

mit $\mathfrak{e}$-Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$. Dann besitzt eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ die Normalfolge $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\nu)$ (möglicherweise mit Wiederholungen):

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\nu \subseteqq| \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{H} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\nu) \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

deren Faktoren

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\nu \cong (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_{\nu+1})\,\mathfrak{U}_\nu/\mathfrak{U}_\nu \subseteqq \mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$$

gleichfalls $\mathfrak{e}$-Gruppen sind.

Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nach einem Normalteiler $\mathfrak{N} \subseteqq| \mathfrak{G}$ besitzt die Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}/\mathfrak{N})$ (möglicherweise mit Wiederholungen):

$$\mathfrak{U}_0 \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = 1; \quad \mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}/\mathfrak{N} \subseteqq| \mathfrak{U}_{\nu+1} \mathfrak{N}/\mathfrak{N}; \quad \mathfrak{U}_\sigma \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}/\mathfrak{N} \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

deren Faktoren

$$\frac{\mathfrak{U}_{\nu+1} \mathfrak{N}/\mathfrak{N}}{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}/\mathfrak{N}} \cong \frac{\mathfrak{U}_{\nu+1} \mathfrak{N}}{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}}$$

als homomorphe Bilder der Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ gleichfalls $\mathfrak{e}$-Gruppen sind.

Mithin ist auch die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{n}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ vollvererbbar.

Lemma 7. *Für jede vollvererbbare Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *bestehen die Ordnungsrelationen*

$$\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e},$$

sowie die Gleichungen

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{l}\mathfrak{e}) = \mathfrak{l}\mathfrak{e} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{e}) = \mathfrak{n}\mathfrak{e}.$$

Genügen zwei Gruppeneigenschaften $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *und* $\mathfrak{e}'(\mathfrak{G})$ *der Ordnungsrelation* $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{e}'$, *so bestehen auch die Relationen*

$$\mathfrak{l}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e}' \quad \textit{und} \quad \mathfrak{n}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e}'.$$

Beweis. 1. In einer $\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ (nach Voraussetzung) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe; mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe:

$$\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e}.$$

Jede $\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt die triviale Normalfolge

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset| \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{G},$$

deren Faktor $\mathfrak{U}_1/\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist; mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppe:

$$\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e}.$$

2. Für jede vollvererbbare Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ sind die abgeleiteten Gruppeneigenschaften $\mathfrak{l}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{n}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ gleichfalls vollvererbbar. Mithin bestehen die Relationen

$$\mathfrak{l}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}(\mathfrak{l}\mathfrak{e}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{e}).$$

Jede endlicherzeugbare Gruppe $\mathfrak{U}$ einer $\mathfrak{l}(\mathfrak{l}\mathfrak{e})$-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe, also eine $\mathfrak{e}$-Gruppe; mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe:

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{l}\mathfrak{e}) \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e}.$$

Jede $\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{e})$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{G} \quad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \quad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu-1}/\mathfrak{U}_\nu$ $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppen sind, also ihrerseits Normalfolgen $(\mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu)$ besitzen:

$$\mathfrak{B}_{\nu 0}/\mathfrak{U}_\nu = 1; \quad \mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{B}_{\nu\mu+1}/\mathfrak{U}_\nu; \quad \mathfrak{B}_{\nu\tau}/\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$$
$$\text{für jeden Index } \mu < \tau = \tau_\nu \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{B}_{\nu\lambda}/\mathfrak{U}_\nu = \bigcup_{\mu<\lambda} \mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu \quad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \tau = \tau_\nu,$$

mit $\mathfrak{e}$-Faktoren

$$\frac{\mathfrak{B}_{\nu\mu+1}/\mathfrak{U}_\nu}{\mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu} \simeq \frac{\mathfrak{B}_{\nu\mu+1}}{\mathfrak{B}_{\nu\mu}}.$$

Die Verfeinerung $(\mathfrak{B}_{\nu\mu})$ der Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$ von $\mathfrak{G}$ ist also eine Normalfolge in $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{e}$-Faktoren. Mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppe:

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{e}) \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e}.$$

3. Es bestehe die Relation $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{e}'$. Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ einer $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, also eine $\mathfrak{e}'$-Gruppe. Mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}'$-Gruppe:

$$\mathfrak{l}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e}'.$$

Eine $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$, deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ $\mathfrak{e}$-Gruppen, also auch $\mathfrak{e}'$-Gruppen sind. Mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{e}'$-Gruppe:

$$\mathfrak{n}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e}'.$$

Beispiele. 1. Die Definition der *Syloweigenschaft* kann in folgender Weise formuliert werden [16]):

Eine Syloweigenschaft $\mathfrak{s}(\mathfrak{G})$ *ist eine vollvererbbare Gruppeneigenschaft, die den Gleichungen genügt*:

$$\mathfrak{l}\mathfrak{s} = \mathfrak{n}\mathfrak{s} = \mathfrak{s}.$$

2. Der Inhalt der Sätze 5 und 5* kann zu folgender Aussage zusammengefaßt werden:

[16]) Vgl. GT, Abschnitt 1.4.4.

Satz 5.** *Die Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$, *eine meßbare Gruppe zu sein, ist vollvererbbar und erfüllt die Gleichungen*

$$\mathfrak{l}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

3. Bezeichnet $\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *endliche Gruppe* zu sein, so ist $\mathfrak{l}\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *lokalendliche Gruppe* zu sein. Da $\mathfrak{l}\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ eine Sylowcigenschaft ist[17]), bestehen die Gleichungen

$$(*) \qquad \mathfrak{l}\mathfrak{l}\mathfrak{f} = \mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

Überdies gilt aber

$$(**) \qquad \mathfrak{n}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{f} \quad \text{und} \quad \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

Wir wollen zeigen, daß die Beziehungen (**) aus den Gleichungen (*) formal abgeleitet werden können:

Da $\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ vollvererbbar ist, gilt $\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{f}$, also

$$\mathfrak{n}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}$$

und daher auch

$$\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{l}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

Andererseits folgt aus der Relation $\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{f}$ die Relation

$$\mathfrak{l}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{f}$$

und die Gleichung

$$\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

Die Relation $\mathfrak{n}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{f}$ ist die Formel für den bekannten Satz[18]):

Jede Gruppe $\mathfrak{G}$, *die eine Normalfolge* $(\mathfrak{U}_\nu)$ *mit endlichen Faktoren* $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ *besitzt, ist lokalendlich.*

Bekanntlich gilt genauer[19])

$$\mathfrak{n}\mathfrak{f} < \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

4. Für die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$, eine *abelsche Gruppe* zu sein, besteht die Gleichung $\mathfrak{l}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, da eine „lokalabelsche" Gruppe notwendig abelsch ist. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{n}\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$ kennzeichnet den Typus der *metabelschen Gruppe*, die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$ den Typus der *lokalmetabelschen Gruppe*. Bekanntlich besteht die genauere Ordnungsrelation

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{n}\mathfrak{a} < \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{a}.$$

Die beiden Prinzipe der Lokalisierung und der (transfiniten) Erweiterung erlauben nun durch Iteration die Bildung aufsteigender Ketten von abstrakten Gruppeneigenschaften gemäß folgender transfiniter Induktion:

1. *Es sei* $\mathfrak{c}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{c}_0(\mathfrak{G})$ *eine vollvererbbare abstrakte Gruppeneigenschaft.*

[17]) Vgl. GT, Satz 1.4.40*.
[18]) Vgl. GT, Satz 1.4.42.
[19]) Vgl. a.a.O.[14]) Beispiel 1 im Anhang.

2. *Es sei σ eine beliebige Ordnungszahl und für jede Ordnungszahl $\nu<\sigma$ eine (vollvererbbare) abstrakte Gruppeneigenschaft $\mathfrak{c}_\nu(\mathfrak{G})$ erklärt.*

Ist σ keine Limeszahl, so sei

$$\mathfrak{c}_\sigma(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{c}_{\sigma-1}(\mathfrak{G}).$$

Ist σ Limeszahl, so sei

$$\mathfrak{c}_\sigma^*(\mathfrak{G}) = \max_{\nu<\sigma} \mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}) \quad \textit{für jede Gruppe } \mathfrak{G}$$

und

$$\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G}).$$

Auf Grund dieser Definition gilt also:

(1) *Ist σ keine Limeszahl, so bedeutet $\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G})=1$:*

Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{B}_\nu)$:

$$\mathfrak{B}_0 = E; \quad \mathfrak{B}_\nu \subset| \mathfrak{B}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{U} \quad \textit{für jeden Index } \nu<\tau=\tau(\mathfrak{U}),$$

$$\mathfrak{B}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{B}_\nu \quad \textit{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \tau,$$

deren Faktoren $\mathfrak{B}_{\nu+1}/\mathfrak{B}_\nu$ $\mathfrak{e}_{\sigma-1}$-Gruppen sind.

(2) *Ist σ Limeszahl, so bedeutet $\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G})=1$:*

Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine $\mathfrak{e}_\nu$-Gruppe mit einer Ordnungszahl $\nu=\nu(\mathfrak{U})<\sigma$.

Da offensichtlich für jede Ordnungszahl σ die Relation

$$\mathfrak{e}_\sigma \leqq \mathfrak{e}_{\sigma+1},$$

für jede Limeszahl σ und jede Ordnungszahl $\nu<\sigma$ die Relation

$$\mathfrak{e}_\nu \leqq \mathfrak{e}_\sigma^* \leqq \mathfrak{e}_\sigma$$

besteht, bezeichnen wir die Menge $(\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}))$ aller Eigenschaften $\mathfrak{e}_\nu$ mit einem Index $\nu \leqq \sigma$ als *die aus der Eigenschaft $\mathfrak{e}_0(\mathfrak{G})$ ableitbare Eigenschaftenfolge der Länge σ.*

Jede der Eigenschaften $\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G})$ ist eine vollvererbbare Gruppeneigenschaft. Da nämlich $\mathfrak{c}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{e}_0(\mathfrak{G})$ nach Voraussetzung vollvererbbar ist, darf zur Durchführung einer transfiniten Induktion angenommen werden, sämtliche Eigenschaften $\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G})$ mit einem Index $\nu<\sigma$ seien vollvererbbar. Ist dann σ keine Limeszahl, so ist $\mathfrak{e}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})$ vollvererbbar; das Gleiche gilt für die Eigenschaften $\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_{\sigma-1}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G})$. Ist aber σ eine Limeszahl, so ist die Gruppeneigenschaft

$$\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G}) = \max_{\nu<\sigma} \mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G})$$

vollvererbbar. Gilt nämlich für eine Gruppe

$$\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G}) = \mathfrak{e}_\mu(\mathfrak{G}) = 1 \quad \text{mit einem Index } \mu<\sigma,$$

so gilt für jede Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ und jede Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nach einem Normalteiler $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$

$$e_\mu(\mathfrak{H}) = e_\mu(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = 1,$$

also auch

$$e_\sigma^*(\mathfrak{H}) = e_\sigma^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = 1.$$

Da demnach $e_\sigma^*(\mathfrak{G})$ vollvererbbar ist, gilt das Gleiche für die Eigenschaft $e_\sigma(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\, e_\sigma^*(\mathfrak{G})$.

In der aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ ableitbaren Eigenschaftenfolge $(e_\nu(\mathfrak{G}))$ der Länge σ kann eine Gleichung

$$e_{\lambda+1} = e_\lambda \qquad \text{für einen Index } \lambda < \sigma$$

eintreten. Offenbar gilt dann auch

$$e_{\lambda+1} = e_\lambda = e_\mu = e_\sigma \qquad \text{für jeden Index } \lambda < \mu < \sigma.$$

Es besteht der

Satz 8. *In der aus einer vollvererbbaren Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *ableitbaren Eigenschaftenfolge* $(e_\nu(\mathfrak{G}))$ *der Länge* σ *tritt eine Gleichung*

$$e_{\lambda+1} = e_\lambda \qquad \textit{für einen Index } \lambda < \sigma$$

genau dann ein, wenn $e_\lambda(\mathfrak{G})$ *eine Syloweigenschaft ist.*

Beweis. 1. Ist die (vollvererbbare) Gruppeneigenschaft $e_\lambda(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft, so bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{l}\, e_\lambda = \mathfrak{n}\, e_\lambda = e_\lambda.$$

Daher folgt

$$e_{\lambda+1} = \mathfrak{l}\, \mathfrak{n}\, e_\lambda = \mathfrak{l}\, e_\lambda = e_\lambda.$$

2. Besteht die Gleichung

$$e_{\lambda+1} = \mathfrak{l}\, \mathfrak{n}\, e_\lambda = e_\lambda,$$

so folgt aus der Ordnungsrelation

$$e_\lambda \subseteq \mathfrak{n}\, e_\lambda \subseteq \mathfrak{l}\, \mathfrak{n}\, e_\lambda = e_\lambda$$

die Gleichung $e_\lambda = \mathfrak{n}\, e_\lambda$ und weiter die Gleichung

$$\mathfrak{l}\, e_\lambda = \mathfrak{l}\, \mathfrak{n}\, e_\lambda = e_{\lambda+1} = e_\lambda.$$

Mithin ist $e_\lambda(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft.

Wir bemerken weiter:

Satz 9. *Es seien* $\mathfrak{d}(\mathfrak{G})$ *und* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *vollvererbbare Gruppeneigenschaften und* $(\mathfrak{d}_\nu(\mathfrak{G}))$ *bzw.* $(e_\nu(\mathfrak{G}))$ *die aus ihnen ableitbaren Eigenschaftenfolgen. Besteht die Relation* $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{e}$, *so besteht auch die Relation* $\mathfrak{d}_\lambda \subseteq e_\lambda$ *für jede Ordnungszahl* λ.

Beweis. Zur Durchführung einer transfiniten Induktion darf angenommen werden, es gelte außer der Relation $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{e}$ jede Relation $\mathfrak{d}_\nu \subseteq e_\nu$ mit einer

Ordnungszahl $\nu < \lambda$. Ist λ nicht Limeszahl, so gilt $\mathfrak{d}_{\lambda-1} \leqq \mathfrak{e}_{\lambda-1}$. Hieraus folgt nach Lemma 7

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_{\lambda-1} \leqq \mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_{\lambda-1}$$

und

$$\mathfrak{d}_\lambda = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_{\lambda-1} \leqq \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_{\lambda-1} = \mathfrak{e}_\lambda.$$

Ist λ Limeszahl, so genügt jede Gruppe $\mathfrak{G}$ nach Induktionsannahme der Ungleichung

$$\mathfrak{d}_\nu(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}) \qquad \text{für jeden Index } \nu < \lambda.$$

Hieraus folgt für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ungleichung

$$\mathfrak{d}_\lambda^*(\mathfrak{G}) = \max_{\nu<\lambda} \mathfrak{d}_\nu(\mathfrak{G}) \leqq \max_{\nu<\lambda} \mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}) = \mathfrak{e}_\lambda^*(\mathfrak{G}),$$

also die Relation

$$\mathfrak{d}_\lambda^* \leqq \mathfrak{e}_\lambda^*$$

und weiter nach Lemma 7 die Relation

$$\mathfrak{d}_\lambda = \mathfrak{l}\,\mathfrak{d}_\lambda^* \leqq \mathfrak{l}\,\mathfrak{e}_\lambda^* = \mathfrak{e}_\lambda.$$

Beispiele. 1. Aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{f}_0(\mathfrak{G})$, eine *endliche Gruppe* zu sein, gewinnen wir die Gruppeneigenschaft

$$\mathfrak{f}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{f}_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{G}),$$

eine *lokalendliche Gruppe* zu sein. Da $\mathfrak{l}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft ist, besteht die Gleichung

$$\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{l}\,\mathfrak{f}_0.$$

Die aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ ableitbare Eigenschaftenfolge ist $(\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1)$, hat also die Länge 1.

2. Für jede *Syloweigenschaft* $\mathfrak{s}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{s}_0(\mathfrak{G})$ besteht nach Satz 8 die Gleichung

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s}_1.$$

Infolgedessen besteht auch für die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$, eine *meßbare Gruppe* zu sein, die Gleichung

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_1.$$

3. Aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{a}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{a}_0(\mathfrak{G})$, eine *abelsche Gruppe* zu sein, können wir zunächst die Gruppeneigenschaft

$$\mathfrak{a}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$$

ableiten, die den Typus der *lokalmetabelschen Gruppe* kennzeichnet. Ich weiß nicht, ob in der aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$ ableitbaren Eigenschaftenfolge $(\mathfrak{a}_\nu(\mathfrak{G}))$ für eine gewisse Ordnungszahl λ die Gleichung

$$\mathfrak{a}_{\lambda+1} = \mathfrak{a}_\lambda$$

eintritt, und vermute auch nichts. Zur näheren Beleuchtung dieser Frage will ich die folgenden beiden Aussagen beweisen:

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heiße *ordnungsfinit*, wenn jedes Element $G \in \mathfrak{G}$ eine endliche Ordnung besitzt. Jede lokalendliche Gruppe ist ordnungsfinit; neuerdings weiß man, daß es ordnungsfinite Gruppen gibt, die nicht lokalendlich sind, wodurch eine langgehegte Vermutung der Gruppentheorie widerlegt ist.

Satz 10. *Für jede Ordnungszahl $\sigma \geqq 1$ ist jede ordnungsfinite $\mathfrak{a}_\sigma$-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine lokalendliche $\mathfrak{a}_1$-Gruppe.*

Beweis. Offenbar genügt es, nachzuweisen, daß jede ordnungsfinite $\mathfrak{a}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine lokalendliche $\mathfrak{a}_1$-Gruppe ist.

In einer ordnungsfiniten $\mathfrak{a}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset\!| \, \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\tau = \mathfrak{H} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \tau = \tau(\mathfrak{H}),$$
$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \quad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \tau,$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ $\mathfrak{a}_1$-Gruppen, d.h. lokalmetabelsche Gruppen sind. Da $\mathfrak{H}$ endlicherzeugbar ist, ist der Index τ nicht Limesindex und folglich von der Gestalt $\tau = \lambda + n$, worin n eine natürliche Zahl und λ entweder eine Limeszahl oder 0 bedeutet. Der Faktor $\mathfrak{H}/\mathfrak{U}_{\tau-1}$ ist eine endlicherzeugbare ordnungsfinite $\mathfrak{a}_1$-Gruppe, also metabelsch. Da eine ordnungsfinite metabelsche Gruppe lokalendlich [20]) ist, ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{U}_{\tau-1}$ eine endliche metabelsche Gruppe. Als Untergruppe von endlichem Index in $\mathfrak{H}$ ist demnach $\mathfrak{U}_{\tau-1}$ eine endlicherzeugbare ordnungsfinite Gruppe [21]). Durch eine vollständige Induktion ergibt sich, daß auch die Gruppe $\mathfrak{U}_\lambda$ endlicherzeugbar ist, weshalb nur $\lambda = 0$ gelten kann. Mithin ist $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe mit einer Normalfolge

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset\!| \, \mathfrak{U}_1 \subset\!| \cdots \subset\!| \, \mathfrak{U}_{n-1} \subset\!| \, \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H},$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ metabelsch sind. Daher ist auch $\mathfrak{H}$ metabelsch.

In der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist demnach jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ endlich und metabelsch. Folglich ist $\mathfrak{G}$ eine lokalendliche, lokalmetabelsche Gruppe, d.h. eine lokalendliche $\mathfrak{a}_1$-Gruppe.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ ist nach R. BAER [22]) eine *noethersche Gruppe*, wenn sie der Maximalbedingung genügt, eine *lokalnoethersche Gruppe*, wenn jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ eine noethersche Gruppe ist, also der Maximalbedingung genügt. Bekanntlich ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$ genau dann eine noethersche Gruppe, wenn jede Untergruppe $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ endlicherzeugbar ist.

Für diesen Gruppentypus besteht der

Satz 11*. *Für jede Ordnungszahl $\sigma \geqq 1$ ist jede lokalnoethersche $\mathfrak{a}_\sigma$-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine (lokalnoethersche) $\mathfrak{a}_1$-Gruppe.*

[20]) Vgl. GT, Satz 3.1.19.

[21]) Vgl. GT, Satz 2.1.4.

[22]) Vgl. R. BAER: Noethersche Gruppen. Math. Z. **66**, 269–288 (1956). — Lokal Noethersche Gruppen. Math. Z. **66**, 341–363 (1956).

Dieser Satz ergibt sich aus der folgenden allgemeinen Aussage:

Satz 11. *Es sei* $\mathfrak{c}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{c}_0(\mathfrak{G})$ *eine beliebige vollvererbbare Gruppeneigenschaft und* $(\mathfrak{c}_\nu(\mathfrak{G}))$ *die aus ihr ableitbare Eigenschaftenfolge. Für jede Ordnungszahl* $\sigma \geqq 1$ *ist jede lokalnoethersche* $\mathfrak{c}_\sigma$*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *eine (lokalnoethersche)* $\mathfrak{c}_1$*-Gruppe.*

Beweis. Offenbar genügt es wiederum nachzuweisen, daß jede lokalnoethersche $\mathfrak{e}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{e}_1$-Gruppe ist.

Jede endlicherzeugbare (und damit noethersche) Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer lokalnoetherschen $\mathfrak{e}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$, deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ $\mathfrak{e}_1$-Gruppen sind. Da $\mathfrak{H}$ der Maximalbedingung genügt, ist die Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$ endlich:

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset| \mathfrak{U}_1 \subset| \cdots \subset| \mathfrak{U}_{n-1} \subset| \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H}.$$

Hierbei ist jede Untergruppe $\mathfrak{U}_\nu$, also auch jeder Faktor $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ eine noethersche Gruppe, also endlicherzeugbar. Jede endlicherzeugbare noethersche $\mathfrak{e}_1$-Gruppe $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ besitzt eine (endliche) Normalfolge

$$\mathfrak{U}_\nu/\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{B}_{\nu 0}/\mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{B}_{\nu 1}/\mathfrak{U}_\nu \subset| \cdots \subset| \mathfrak{B}_{\nu, m-1}/\mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{B}_{\nu m}/\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$$

mit $\mathfrak{e}$-Faktoren

$$\frac{\mathfrak{B}_{\nu,\mu+1}/\mathfrak{U}_\nu}{\mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu} \cong \frac{\mathfrak{B}_{\nu,\mu+1}}{\mathfrak{B}_{\nu\mu}}.$$

Die Verfeinerung $(\mathfrak{B}_{\nu\mu})$ der Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$ in $\mathfrak{H}$ ist also eine Normalfolge von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{e}$-Faktoren.

Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ besitzt somit eine Normalfolge mit $\mathfrak{e}$-Faktoren; daher ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{e}_1$-Gruppe.

6.

Unter den im vorangehenden Abschnitt eingeführten Bezeichnungen drücken die Ordnungsrelationen

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}; \qquad \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}$$

die folgenden Sachverhalte aus:

Jede endliche oder abelsche Gruppe ist klassenfinit.

Jede klassenfinite Gruppe ist meßbar.

Bezeichnen wir nun noch zur Abkürzung mit $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, *eine endliche oder eine abelsche Gruppe* zu sein, so bestehen auch die Relationen

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}.$$

Da die Gruppeneigenschaften $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ vollvererbbar sind, können aus ihnen die Eigenschaftsfolgen $(\mathfrak{c}_\nu(\mathfrak{G}))$ bzw. $(\mathfrak{k}_\nu(\mathfrak{G}))$ abgeleitet werden. Nach Satz 9 folgt aus der Relation

$$\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}$$

die Relation

$$\mathfrak{c}_\lambda \leqq \mathfrak{k}_\lambda \leqq \mathfrak{m}_\lambda \quad \text{für jede Ordnungszahl } \lambda$$

und auf Grund der nach Satz 8 für jede Ordnungszahl λ gültigen Gleichung

$$\mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$$

Satz 12. *Es bezeichne* $\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ *die Gruppeneigenschaft, eine klassenfinite Gruppe zu sein, und* $(\mathfrak{k}_\nu(\mathfrak{G}))$ *die aus* $\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ *ableitbare Eigenschaftsfolge.*

Jede $\mathfrak{k}_\sigma$*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *(bei beliebiger Ordnungszahl* σ*) ist meßbar.*

Gleichwertig mit diesem Satze ist übrigens der

Satz 12*. *Es bezeichne* $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ *die Gruppeneigenschaft, eine endliche oder eine abelsche Gruppe zu sein, und* $(\mathfrak{c}_\nu(\mathfrak{G}))$ *die aus* $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ *ableitbare Eigenschaftenfolge.*

Jede $\mathfrak{c}_\sigma$*-Gruppe (bei beliebiger Ordnungszahl* σ*) ist meßbar.*

Die Gleichwertigkeit der Sätze 12 und 12* ergibt sich aus den zwischen den Eigenschaftsfolgen $(\mathfrak{c}_\nu(\mathfrak{G}))$ und $(\mathfrak{k}_\nu(\mathfrak{G}))$ bestehenden Relationen

$$\mathfrak{k}_n \leqq \mathfrak{c}_{n+1} \leqq \mathfrak{k}_{n+1} \qquad \text{für jeden natürlichen Index } 1 \leqq n < \omega,$$

$$\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{c}_\lambda \qquad \text{für jede Ordnungszahl } \omega \leqq \lambda.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer Untersuchung des durch die Eigenschaft $\mathfrak{l}\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ gekennzeichneten Typus der *lokalklassenfiniten Gruppe*. Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer lokalklassenfiniten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist klassenfinit und besitzt, wie wir bereits beim Beweise des Satzes 7 feststellten, ein Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ von endlichem Index [23]), also eine Normalfolge (möglicherweise mit Wiederholungen)

$$E \subseteqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{H}) \subseteqq \mathfrak{H},$$

deren Faktoren endliche oder abelsche, also $\mathfrak{c}$-Gruppen sind. Da demnach jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{c}$-Gruppe ist, ist $\mathfrak{G}$ selbst eine $\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{c}$-Gruppe, d.h. eine $\mathfrak{c}_1$-Gruppe. Mithin besteht die Ordnungsrelation

$$\mathfrak{l}\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \leqq \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{k}.$$

Hieraus erhält man weiter

$$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2 \leqq \mathfrak{k}_2$$

und durch vollständige Induktion

$$\mathfrak{k}_n \leqq \mathfrak{c}_{n+1} \leqq \mathfrak{k}_{n+1} \qquad \text{für jeden natürlichen Index } 1 \leqq n < \omega.$$

Da demnach für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ungleichungen

$$\mathfrak{k}_n(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{c}_{n+1}(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{k}_{n+1}(\mathfrak{G})$$

bestehen, erhält man

$$\mathfrak{k}^*_\omega(\mathfrak{G}) = \max \mathfrak{k}_n(\mathfrak{G}) \leqq \max \mathfrak{c}_{n+1}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{c}^*_\omega(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{k}^*_\omega(\mathfrak{G})$$

und

$$\mathfrak{k}_\omega = \mathfrak{l}\mathfrak{k}^*_\omega \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{c}^*_\omega = \mathfrak{c}_\omega \leqq \mathfrak{k}_\omega.$$

[23]) Vgl. auch B. H. NEUMANN: Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. London Math. Soc. (3) **1**, 178–187 (1951).

Aus der Gleichung $\mathfrak{k}_\omega = \mathfrak{c}_\omega$ folgt nun auch die Gleichung

$$\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{c}_\lambda \qquad \text{für jede Ordnungszahl } \omega \leqq \lambda.$$

Ich weiß nicht, ob bereits für einen natürlichen Index m die Gleichung

$$\mathfrak{k}_m = \mathfrak{c}_m$$

eintritt; ebensowenig weiß ich, ob für eine Ordnungszahl λ die Gleichung

$$\mathfrak{k}_{\lambda+1} = \mathfrak{k}_\lambda \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}_{\lambda+1} = \mathfrak{c}_\lambda$$

eintritt.

Auf Grund der eingangs angegebenen Relation

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{k}$$

besteht auch die Relation

$$\mathfrak{I}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{I}\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{I} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1.$$

Die Klasse der $\mathfrak{c}_1$-Gruppen enthält also insbesondere die Klasse der lokalendlichen Gruppen. Umgekehrt aber ist jede ordnungsfinite $\mathfrak{c}_1$-Gruppe eine lokalendliche Gruppe. Denn es gilt allgemeiner der

Satz 13. *Jede ordnungsfinite $\mathfrak{c}_\sigma$-Gruppe $\mathfrak{G}$ (bei beliebiger Ordnungszahl σ) ist lokalendlich.*

Beweis. Es genügt wiederum, nachzuweisen, daß jede ordnungsfinite $\mathfrak{c}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ lokalendlich ist.

Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer ordnungsfiniten $\mathfrak{c}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\tau = \mathfrak{H} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \tau = \tau(\mathfrak{H}),$$

$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \tau,$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ (ordnungsfinite) $\mathfrak{c}_1$-Gruppen sind. Da $\mathfrak{H}$ endlicherzeugbar ist, ist τ keine Limeszahl, also von der Gestalt $\tau = \lambda + n$, worin n eine natürliche Zahl und λ entweder eine Limeszahl oder 0 bedeutet.

Der Faktor $\mathfrak{H}/\mathfrak{U}_{\tau-1}$ ist demnach eine endlicherzeugbare ordnungsfinite $\mathfrak{c}_1$-Gruppe, besitzt also eine Normalfolge $(\mathfrak{V}_\mu/\mathfrak{U}_{\tau-1})$ mit endlichen oder (ordnungsfiniten) abelschen Faktoren. Dann kann die Normalfolge $(\mathfrak{V}_\mu/\mathfrak{U}_{\tau-1})$ aber derart verfeinert werden, daß in ihr nur endliche Faktoren auftreten. Mithin ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{U}_{\tau-1}$ eine endlicherzeugbare ordnungsfinite metafinite Gruppe, also endlich [24]). Dann ist aber $\mathfrak{U}_{\tau-1}$ eine endlicherzeugbare ordnungsfinite Gruppe. Durch vollständige Induktion zieht man nun die Folgerung, daß auch $\mathfrak{U}_\lambda$ eine endlicherzeugbare Gruppe ist, was nur im Falle $\lambda = 0$ zutrifft.

Mithin ist $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe, die Gruppe $\mathfrak{G}$ selbst also eine lokalendliche Gruppe.

[24]) Vgl. GT, Satz 1.4.42.

Jede lokalendliche Gruppe ist, wie wir gesehen haben, meßbar. Ob es nichtlokalendliche ordnungsfinite Gruppen gibt, die gleichfalls meßbar sind, ist mir unbekannt.

Eine unmittelbare Folgerung des Satzes 11 ist auch der

Satz 13*. *Jede lokalnoethersche* $\mathfrak{c}_\sigma$*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *(bei beliebiger Ordnungszahl* $\sigma \geqq 1$*) ist eine (lokalnoethersche)* $\mathfrak{c}_1$*-Gruppe.*

Die Struktur der lokalnoetherschen $\mathfrak{c}_1$-Gruppe kennzeichnet

Satz 14. *Folgende beiden Aussagen sind gleichwertig:*

1. *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist eine lokalnoethersche* $\mathfrak{c}_1$*-Gruppe.*

2. *Jede endlicherzeugbare Untergruppe* $\mathfrak{H}$ *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *besitzt eine endliche Normalfolge*

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset| \mathfrak{U}_1 \subset| \cdots \subset| \mathfrak{U}_{n-1} \subset| \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H} \qquad (n = n(\mathfrak{H})),$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ *entweder endliche Gruppen oder unendlichzyklische Gruppen sind.*

Beweis. 1. Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer lokalnoetherschen $\mathfrak{c}_1$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine (endliche) Normalfolge

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset| \mathfrak{U}_1 \subset| \cdots \subset| \mathfrak{U}_{n-1} \subset| \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H},$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ entweder endlich oder abelsch sind. Im abelschen Falle ist der Faktor $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ als noethersche Gruppe direktes Produkt einer endlichen abelschen und einer freien abelschen Gruppe endlichen Ranges [25]). Dann kann aber die Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$ derart verfeinert werden, daß nur endliche und unendlichzyklische Faktoren auftreten.

2. Besitzt jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine endliche Normalfolge

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset| \mathfrak{U}_1 \subset| \cdots \subset| \mathfrak{U}_{n-1} \subset| \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H}$$

mit endlichen oder unendlichzyklischen Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$, so ist $\mathfrak{H}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{c}$-Gruppe, also $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{c}$-Gruppe, d.h. eine $\mathfrak{c}_1$-Gruppe. Da jeder Faktor $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ eine noethersche Gruppe ist, ist auch $\mathfrak{H}$ eine noethersche Gruppe [26]), die Gruppe $\mathfrak{G}$ also eine lokalnoethersche Gruppe.

7.

Nach dem Satz 3 von F. HAUSDORFF ist die Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3} = \{A, B\} \quad \text{mit} \quad A^2 = B^3 = E$$

nicht meßbar. Da die Gruppe $\mathfrak{F}_{2,3}$ homomorphes Bild der freien Gruppe $\mathfrak{F}_2$ vom Range 2, diese wiederum Untergruppe jeder freien Gruppe $\mathfrak{F}_r$ beliebigen Ranges $r > 1$ ist, gilt der

[25]) Vgl. GT, Satz 2.4.17*.

[26]) Vgl. a.a.O.[22]) oder GT, Abschnitt 1.4.4, Beispiel 4*.

Satz 15. *Jede Gruppe $\mathfrak{G}$, die eine freie Gruppe $\mathfrak{F}_r$ vom Range $r > 1$ als Untergruppe enthält, ist nicht meßbar.*

Die Negation der diesem Satze zugrundeliegenden Voraussetzung führt auf die Definition:

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heiße verschränkt, wenn zwischen je zwei von E und voneinander verschiedenen Elementen $G, H \in \mathfrak{G}$ eine (nichttriviale) Relation

$$R(G, H) = G^{a_1} H^{b_1} G^{a_2} H^{b_2} \dots G^{a_n} H^{b_n} = E$$

einer Länge $n \geqq 1$ mit von Null verschiedenen Exponenten $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ besteht.

Sinngemäß sind die beiden Gruppen der Ordnung 1 bzw. 2 als verschränkte Gruppen anzusehen.

Offenbar ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$ genau dann nicht verschränkt, wenn sie eine freie Gruppe $\mathfrak{F}_2$ vom Range 2 als Untergruppe enthält. Bezeichnet im folgenden $\mathfrak{v}(\mathfrak{G})$ die abstrakte Gruppeneigenschaft, eine *verschränkte Gruppe* zu sein, so besteht nach Satz 15 die Ordnungsrelation $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{v}$, also der

Satz 15*. *Jede nicht verschränkte Gruppe $\mathfrak{G}$ ist nicht meßbar. Jede meßbare Gruppe $\mathfrak{G}$ ist verschränkt.*

Ich weiß nicht, ob jede verschränkte Gruppe meßbar ist. Einerseits konnte ich nur nachweisen, daß jede lokalendliche Gruppe meßbar ist, andererseits ist jede ordnungsfinite Gruppe offensichtlich verschränkt. Es gilt jedoch der

Satz 16. *Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{v}(\mathfrak{G})$ ist eine Syloweigenschaft:*

$$\mathfrak{l}\mathfrak{v} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}.$$

Jedes homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{U}}$ einer jeden Untergruppe $\mathfrak{U}$ einer verschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist verschränkt.

Ist $\mathfrak{N}$ ein verschränkter Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit verschränkter Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ verschränkt.

Besitzt die Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Raster $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$ aus verschränkten Untergruppen $\mathfrak{V} < \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}$ verschränkt.

Beweis. 1. Zwei voneinander und von E verschiedene Elemente U, V einer Untergruppe $\mathfrak{U}$ einer verschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$ erfüllen als Elemente von $\mathfrak{G}$ eine nichttriviale Relation

$$R(U, V) = U^{a_1} V^{b_1} U^{a_2} V^{b_2} \dots U^{a_n} V^{b_n} = E.$$

Mithin ist $\mathfrak{U}$ verschränkt.

2. Es sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler der verschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$. Wäre die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nicht verschränkt, so würden zwei von $\mathfrak{N}$ und voneinander verschiedene Restklassen $\mathfrak{N}X, \mathfrak{N}Y \in \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ existieren, die eine freie Gruppe $\{\mathfrak{N}X, \mathfrak{N}Y\} = \mathfrak{U}/\mathfrak{N}$ vom Range 2 erzeugen. Dann wäre aber $\mathfrak{F} = \{X, Y\}$ eine freie Untergruppe vom Range 2 in $\mathfrak{G}$, da eine nichttriviale Relation $R(X, Y) = E$ auf die gleichlautende Relation $R(\mathfrak{N}X, \mathfrak{N}Y) = \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ führen würde.

3. Es sei $\mathfrak{N}$ ein verschränkter Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit verschränkter Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Es sei $\mathfrak{F}=\{X, Y\}$ eine freie Untergruppe in $\mathfrak{G}$ vom Range 2.

Der Durchschnitt $\mathfrak{D}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ ist eine freie Gruppe in $\mathfrak{N}$, also höchstens vom Range 1. Enthielte die Gruppe $\mathfrak{D}$ ein von E verschiedenes Element $Z=Z(X, Y)$, so enthielte sie auch sämtliche Transformierte $F^{-1}ZF$ mit $F\in\mathfrak{F}$. Im Falle

$$Z=X^a \quad \text{bzw.} \quad Z=Y^b$$

enthielte $\mathfrak{D}$ die freie Gruppe

$$\{X^a, Y^{-1}X^aY\} \quad \text{bzw.} \quad \{Y^b, X^{-1}Y^bX\}$$

vom Range 2. In jedem andern Fall darf für Z die Gestalt

$$Z=X^{a_1}Y^{b_1}X^{a_2}Y^{b_2}\dots X^{a_n}Y^{b_n}X^{a_{n+1}}$$

mit $a_1+a_{n+1}\neq 0$ und von Null verschiedenen Exponenten

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, a_{n+1}$$

vorausgesetzt werden. Dann enthielte $\mathfrak{D}$ aber die freie Gruppe $\{Z, Y^{-1}ZY\}$ vom Range 2.

Mithin gilt $\mathfrak{D}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}=E$. Dann erhalten wir durch die Isomorphie

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}/\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}\cong\mathfrak{F}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$$

eine freie Untergruppe vom Range 2 in der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, entgegen der Voraussetzung, daß auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ verschränkt ist.

4. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze ein Raster $\mathsf{P}=(\mathfrak{V})$ aus verschränkten Untergruppen $\mathfrak{V}<\mathfrak{G}$. Jedes Paar voneinander und von E verschiedener Elemente $G, H\in\mathfrak{G}$ gehört einem Glied $\mathfrak{V}$ des Rasters P an; mithin besteht eine nichttriviale Relation $R(G, H)=E$. Daher ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ selbst verschränkt.

Mathematisches Institut der Universität Erlangen

(Eingegangen am 27. November 1959)

Lingenberg, R.
Math. Zeitschr. 74, 367–386 (1960)

Einbettung projektiv-metrischer Teilstrukturen in projektiv-metrische Ebenen

Von
Rolf Lingenberg

Das Problem der Begründung der ebenen metrischen Geometrie besteht aus zwei Teilproblemen: 1. aus der Frage nach der Einbettung der betrachteten metrischen Ebene in eine projektive Ebene (die Idealebene der metrischen Ebene) und 2. aus der Frage nach der Einbettung der durch das Senkrechtstehen in der metrischen Ebene gegebenen metrischen Struktur in eine projektiv-metrische Struktur der Idealebene.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich allgemein mit dem 2. Problem und untersucht die Frage, unter welchen Voraussetzungen sich eine projektiv-metrische Struktur in einem Teilbereich einer projektiven Ebene zu einer projektiv-metrischen Struktur der ganzen Ebene fortsetzen läßt. Der Begriff einer projektiv-metrischen Teilstruktur wird dabei in naheliegender Verallgemeinerung des Begriffes einer projektiv-metrischen Ebene (im Sinne von Bachmann [1]) gefaßt. Der Einteilung der projektiv-metrischen Ebenen in ordinäre und singuläre projektiv-metrische Ebenen entspricht hier eine Einteilung in ordinäre und singuläre projektiv-metrische Teilstrukturen.

Das Ergebnis der Arbeit ist dann, daß sich eine projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$ in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ in eine projektiv-metrische Struktur von $\mathfrak{P}$ einbetten läßt, wenn 1. an jeder Geraden aus $\mathfrak{T}$ eine Spiegelung existiert und 2. der Satz von den drei Spiegelungen und dessen Umkehrung in $\mathfrak{T}$ gilt und wenn 3. eigentliche, also nur Geraden aus $\mathfrak{T}$ tragende Punkte in $\mathfrak{P}$ vorhanden sind und jede Gerade wenigstens mit drei eigentlichen Punkten inzidiert, wenn sie überhaupt mit einem eigentlichen Punkt inzidiert. In den Beweisen können wir zum Teil Schlüsse verwenden, wie sie schon in [4] für den zweiten Schritt der Begründung aller der metrischen Ebenen benutzt wurden, die durch das Axiomensystem von Bachmann in [1] gegeben werden. Das hier gewonnene Ergebnis ist jedoch allgemeiner als in [4]; es leistet — wie im letzten Teil der Arbeit ausgeführt wird — den zweiten Schritt der Begründung für alle in eine Idealebene einbettbaren metrischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$, welche durch das allgemeinere Axiomensystem in [5] gegeben werden, und insbesondere damit auch aller der metrischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$, welche dem Axiomensystem von Sperner in [7] genügen.

Zu Beginn der Arbeit wollen wir die im Hauptteil benutzten Begriffe und Sätze aus der projektiven Geometrie zusammenstellen, um dem Leser lästiges Nachschlagen zu ersparen.

§ 0. Hilfsmittel aus der projektiven Geometrie

Eine Menge von Punkten und Geraden, für die die projektiven Inzidenzaxiome gelten, nennen wir eine *projektive Inzidenzebene* $\mathfrak{P}$[1]. Die Punkte von $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben und die Geraden von $\mathfrak{P}$ mit kleinen lateinischen Buchstaben. Die Inzidenz von Punkt und Gerade werde durch das Symbol I bezeichnet. Die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte P, Q sei mit (P,Q) und der Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden g, h mit (g, h) bezeichnet. Drei Punkte heißen *kollinear*, wenn sie mit derselben Geraden inzidieren und drei Geraden heißen *kopunktal*, wenn sie mit demselben Punkt inzidieren. Die Gesamtheit der Punkte auf einer Geraden nennen wir eine *Punktreihe* und die Gesamtheit der Geraden durch einen Punkt ein *Geradenbüschel*. Punktreihen und Geradenbüschel nennt man *eindimensionale projektive Grundgebilde*.

Eine projektive Inzidenzebene, in der der Satz von PAPPUS-PASCAL gilt, heißt eine *Pappussche Ebene*, und eine Pappussche Ebene, in der zusätzlich das Fano-Axiom gilt, heißt eine *projektive Ebene*[1]).

Eine eineindeutige Zuordnung zwischen einer Punktreihe und einem Geradenbüschel wird eine *Perspektivität* genannt, wenn zugeordnete Punkte und Geraden inzidieren. Jede eineindeutige Abbildung eines eindimensionalen projektiven Grundgebildes auf ein eindimensionales projektives Grundgebilde, welche durch eine (endliche) Kette von Perspektivitäten bewirkt werden kann, wird eine *projektive Abbildung* genannt. In einer projektiven Ebene gilt der *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie*: Auf einer Geraden gibt es nur eine projektive Abbildung, welche drei gegebene verschiedene Punkte in drei gegebene verschiedene Punkte überführt.

Eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte und der Menge der Geraden einer projektiven Inzidenzebene je auf sich, bei der die Inzidenz erhalten bleibt, heißt eine *Kollineation*. Eine Kollineation heißt *projektiv*, wenn sie jedes eindimensionale projektive Grundgebilde projektiv abbildet.

Spezielle Beispiele projektiver Kollineationen sind die *perspektiven Kollineationen*, welche einen Punkt Z, das *Zentrum*, geradenweise und eine Gerade a, die *Achse*, punktweise festlassen. Für eine perspektive Kollineation α mit Z als Zentrum und a als Achse gilt:

(1) *P, $P\alpha$, Z sind kollinear für alle Punkte P von $\mathfrak{P}$.*

(2) *g, $g\alpha$, a sind kopunktal für alle Geraden g von $\mathfrak{P}$.*

Ist $Z \mathrm{I} a$, so heißt α eine *Elation*, und ist $Z \nmid a$, so heißt α eine *Homologie*. Besondere Bedeutung haben für uns die involutorischen Homologien. Für sie gilt in einer projektiven Ebene:

I. *Es gibt genau eine involutorische Homologie σ mit einer gegebenen Geraden a als Achse und einem gegebenen Punkt Z als Zentrum.*

II. *Ist P ein Punkt $\neq Z$ mit $P \nmid a$, so liegen die Punkte P, $P\sigma$ auf der Geraden $g = (P, Z)$ harmonisch in bezug auf die Punkte Z und (g, a)* (vgl. Fig. 2).

[1]) In vielen Arbeiten wird eine projektive Inzidenzebene schon als projektive Ebene bezeichnet. Wir folgen hier jedoch der Bezeichnungsweise von BACHMANN [*1*].

III. *Das Produkt zweier involutorischer Homologien ist dann und nur dann involutorisch, wenn jeweils das Zentrum der einen auf der Achse der anderen liegt. Ist das Produkt zweier involutorischer Homologien σ, σ' mit Z, Z' als Zentren und a, a' als Achsen involutorisch, so ist $\sigma\sigma'$ eine involutorische Homologie mit (Z, Z') als Achse und (a, a') als Zentrum.*

Wir bemerken, daß III bereits in einer projektiven Inzidenzebene richtig ist (vgl. [4]).

Eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte auf die Menge der Geraden und der Menge der Geraden auf die Menge der Punkte in einer projektiven Inzidenzebene, bei der die Inzidenz erhalten bleibt, heißt eine *Korrelation*. Eine Korrelation heißt *projektiv*, wenn sie jedes eindimensionale projektive Grundgebilde projektiv abbildet. Es gilt:

IV. *Eine Korrelation, welche wenigstens eine Punktreihe projektiv abbildet, ist projektiv.*

Eine involutorische Korrelation wird eine *Polarität* genannt. Ist eine Polarität π gegeben, so wird die Bildgerade $A\pi = a$ eines Punktes A die *Polare* von A, und der Bildpunkt $a\pi = A$ einer Geraden a der *Pol* von a genannt.

Eine projektive Ebene, in der eine feste Polarität gegeben ist, nennen wir eine *ordinäre projektiv-metrische Ebene*. Die gegebene Polarität wird auch die *absolute Polarität* der projektiv-metrischen Ebene genannt. Zwei Geraden heißen zueinander *senkrecht*, wenn die eine Gerade durch den Pol der anderen geht. Die involutorischen Homologien mit nicht inzidierenden Paaren Pol-Polare als Zentrum und Achse nennen wir die *erzeugenden Spiegelungen*, und die projektiven Kollineationen, welche durch Hintereinanderausführen solcher Spiegelungen entstehen, die *Bewegungen* der ordinären projektiv-metrischen Ebene. Diese bilden eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe* der ordinären projektiv-metrischen Ebene.

Unter einer *singulären projektiv-metrischen Ebene* verstehen wir eine projektive Ebene, in welcher eine Gerade als sogenannte *unendlichferne Gerade* g_∞ und auf ihr eine projektive fixpunktfreie Involution ausgezeichnet ist. Diese wird als *absolute Polarinvolution* bezeichnet. Je zwei einander in der absoluten Polarinvolution entsprechende Punkte der Geraden g_∞ werden zueinander *polar* genannt. Zwei von g_∞ verschiedene Geraden werden zueinander *senkrecht* genannt, wenn sie die Gerade g_∞ in zueinander polaren Punkten schneiden; die Gerade g_∞ soll zu allen Geraden, auch zu sich selbst, senkrecht genannt werden. Jeder Punkt der Geraden g_∞ wird als *Pol* aller Geraden bezeichnet, die durch den zu ihm polaren Punkt hindurchgehen. Jede von g_∞ verschiedene Gerade hat damit eindeutig einen *Pol*.

Die involutorischen Homologien mit den von g_∞ verschiedenen Geraden als Achsen und ihren Polen als Zentren nennen wir die *erzeugenden Spiegelungen*, und die projektiven Kollineationen, welche durch Hintereinanderausführen solcher Spiegelungen entstehen, die *Bewegungen* der singulären projektiv-metrischen Ebene. Diese bilden eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe* der singulären projektiv-metrischen Ebene.

A. Ordinäre projektiv-metrische Teilstrukturen

§ 1. Die grundlegenden Definitionen

Sei $\mathfrak{m}$ eine Menge von Geraden und $\mathfrak{M}$ eine Menge von Punkten einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ und φ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

(*) *Aus* $P \mathrm{I} g$ *folgt* $P\varphi^{-1} \mathrm{I} g\varphi$ *für* $P \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{m}$.

Wir nennen dann das Paar (φ, φ^{-1}) von eineindeutigen Abbildungen von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ und von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{m}$ eine *ordinäre Pol-Polarenbeziehung* π zwischen den Elementen von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$. Es ist dann $g\pi = g\varphi$ für g aus $\mathfrak{m}$ und $P\pi = P\varphi^{-1}$ für P aus $\mathfrak{M}$. Offenbar gilt für π:

1. *Aus* $P \mathrm{I} g$ *folgt* $P\pi \mathrm{I} g\pi$ *für* $P \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{m}$.
2. *Es ist* $\pi^2 = 1$.

Hierbei bezeichnet 1 die Abbildung, welche alle Elemente von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ auf sich abbildet. Wir nennen $g\pi$ den *Pol* der Geraden g und $P\pi$ die *Polare* des Punktes P.

Ist $\mathfrak{m}$ die Menge aller Geraden und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Punkte von P, so ist π eine Polarität.

Ein Paar $\mathfrak{T} = (\mathfrak{m}, \mathfrak{M})$ aus einer Menge $\mathfrak{m}$ von Geraden und einer Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten der Ebene $\mathfrak{P}$ nennen wir eine *ordinäre projektiv-metrische Teilstruktur*, wenn zwischen den Elementen von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ eine ordinäre Pol-Polarenbeziehung definiert ist.

Zwei Geraden g, h aus $\mathfrak{m}$ heißen zueinander *senkrecht*, in Symbolen $g \perp h$, wenn g mit dem Pol von h [und damit nach (*) auch h mit dem Pol von g] inzidiert. Das Senkrechtstehen ist symmetrisch. Entsprechend nennen wir zwei Punkte P, Q aus $\mathfrak{M}$ zueinander *polar*, wenn P mit der Polaren von Q [und damit nach (*) auch Q mit der Polaren von P] inzidiert.

Eine eineindeutige, involutorische Abbildung σ der Menge der Geraden einer ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur $\mathfrak{T}$ auf sich, bei welcher kopunktale Geraden in kopunktale Geraden und zueinander senkrechte Geraden in zueinander senkrechte Geraden übergeführt werden, heißt eine *Spiegelung* an der Geraden g aus $\mathfrak{T}$, wenn gilt

(**) *$a, a\sigma, g$ sind kopunktal für alle Geraden a aus $\mathfrak{T}$.*

Eine Spiegelung an der Geraden g bezeichnen wir mit σ_g.

Jede Abbildung, welche durch Hintereinanderausführen von Spiegelungen entsteht, nennen wir eine *Bewegung* von $\mathfrak{T}$. Die Bewegungen von $\mathfrak{T}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{B}$, die *Bewegungsgruppe* von $\mathfrak{T}$.

Wir betrachten nun im folgenden ordinäre projektiv-metrische Teilstrukturen $\mathfrak{T}$, für welche folgende Bedingungen erfüllt sind:

T 1. *Zu jeder Geraden g aus $\mathfrak{T}$ gibt es wenigstens eine Spiegelung an g.*

T 2. *Die Aufeinanderfolge von Spiegelungen an drei Geraden a, b, c aus $\mathfrak{T}$ ist genau dann eine Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$, wenn a, b, c kopunktal sind.*

T 3. *Es gibt mindestens einen eigentlichen Punkt für* $\mathfrak{T}$, *und jede Gerade aus* $\mathfrak{T}$, *die wenigstens mit einem eigentlichen Punkt inzidiert, inzidiert mindestens mit drei verschiedenen eigentlichen Punkten.*

Dabei nennen wir einen Punkt von $\mathfrak{P}$ *eigentlich*, wenn alle mit ihm inzidierenden Geraden der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehören. Für die weitere Entwicklung merken wir hier gleich ein sich unmittelbar aus T 3 ergebendes Lemma an:

Lemma 1. *Jeder Punkt der Ebene* $\mathfrak{P}$ *inzidiert mindestens mit drei verschiedenen Geraden einer ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur* $\mathfrak{T}$, *wenn für* $\mathfrak{T}$ *die Forderung* T 3 *erfüllt ist.*

Wir wollen nun zeigen, daß sich eine ordinäre projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, für welche die Forderungen T 1—T 3 erfüllt sind, in eine ordinäre projektiv-metrische Struktur der Ebene $\mathfrak{P}$ einbetten läßt. Wir beginnen damit, die Bewegungen von $\mathfrak{T}$ zu Kollineationen von $\mathfrak{P}$ fortzusetzen.

§ 2. Fortsetzung von Bewegungen zu Kollineationen

Im folgenden sei $\mathfrak{T}$ eine ordinäre projektiv-metrische Teilstruktur, die den Bedingungen T 1—T 3 genügt.

Sei α eine Bewegung von $\mathfrak{T}$. Die Abbildung $\bar{\alpha}$ mit

$$(a, b)\,\bar{\alpha} = (a\,\alpha, b\,\alpha) \qquad \text{für } a, b \text{ aus } \mathfrak{T} \text{ und } a \neq b$$

ist eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte von $\mathfrak{P}$ auf sich, da nach Lemma 1 sich jeder Punkt von $\mathfrak{P}$ in der Form (a, b) mit a, b aus $\mathfrak{T}$ darstellen läßt und α nach Definition kopunktale Geraden aus $\mathfrak{T}$ in kopunktale Geraden bzw. auch nicht kopunktale Geraden in nicht kopunktale Geraden überführt. Wir nennen $\bar{\alpha}$ die durch α in $\mathfrak{P}$ induzierte Punktabbildung. Da α zueinander senkrechte Geraden in zueinander senkrechte Geraden überführt, gilt $(a\pi)\,\bar{\alpha} = (a\,\alpha)\,\pi$ für a aus $\mathfrak{T}$, also $P\bar{\alpha} \in \mathfrak{T}$ für alle Punkte P aus $\mathfrak{T}$.

Haben drei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{P}$ eine Gerade g aus $\mathfrak{T}$ gemeinsam, so auch ihre Bildpunkte hinsichtlich α. Bezeichnen wir die den Bildpunkten gemeinsame Gerade mit $g\bar{\alpha}$, so gilt

(1) *Es ist* $g\bar{\alpha} = g\alpha$ *für alle Geraden* g *aus* $\mathfrak{T}$.

(2) *Aus* $P \mathrel{I} g$ *folgt* $P\bar{\alpha} \mathrel{I} g\bar{\alpha}$ *für alle* P *aus* $\mathfrak{P}$ *und alle* g *aus* $\mathfrak{T}$.

(3) *Es ist* $P\bar{\alpha}\pi = P\pi\bar{\alpha}$ *und* $g\bar{\alpha}\pi = g\pi\bar{\alpha}$ *für alle* P, g *aus* $\mathfrak{T}$.

Haben dagegen drei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{P}$ eine Gerade aus $\mathfrak{P}$ gemeinsam, welche $\mathfrak{T}$ nicht angehört, so entsteht die Frage, ob dann ihre Bildpunkte ebenfalls kollinear sind, d.h. ob $\bar{\alpha}$ eine Kollineation in $\mathfrak{P}$ ist. Diese Frage ist positiv zu beantworten, da wir zeigen können, daß die durch eine Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{P}$ induzierte Punktabbildung mit einer involutorischen Homologie in $\mathfrak{P}$ übereinstimmt. Zunächst gilt:

Lemma 2. *Für die durch eine Spiegelung an einer Geraden* g *aus* $\mathfrak{T}$ *in* $\mathfrak{P}$ *induzierte Punktabbildung* $\bar{\sigma}_g$ *gilt:*

a) *Es ist* $A\bar{\sigma}_g = A$ *für alle Punkte* A *auf* g.

b) *Es ist* $a\bar{\sigma}_g = a$ *für alle Geraden* a *aus* $\mathfrak{T}$ *mit* $a \mathrel{I} g\pi$.

BEWEIS: a) Nach Lemma 1 gibt es zwei voneinander und von g verschiedene Geraden a, b aus $\mathfrak{T}$ durch A. Nach (**) sind dann $a, g, a\sigma_g$ kopunktal, also auch $a, b, a\sigma_g$, da $a \neq g$ ist und a, g, b kopunktal sind. Entsprechend sieht man ein, daß $a, b, b\sigma_g$ kopunktal sind. Damit gilt $a\sigma_g, b\sigma_g \mathrel{I} A = (a, b)$ und mithin $A\bar{\sigma}_g = (a\sigma_g, b\sigma_g) = A$, wie behauptet.

Aus a) folgt insbesondere $g\bar{\sigma}_g = g$ und damit wegen (3): $(g\pi)\,\bar{\sigma}_g = (g\bar{\sigma}_g)\,\pi = (g\pi)$.

b) Aus $a \mathrel{I} g\pi$ ergibt sich $a\pi \mathrel{I} g$, also nach a) $(a\pi)\,\bar{\sigma}_g = a\pi$. Hieraus folgt unter Benutzung von (3) $a\bar{\sigma}_g = a\pi\bar{\sigma}_g\pi = a\pi\pi = a$.

Weiter zeigen wir zur Vorbereitung unseres angekündigten Satzes den folgenden

HILFSSATZ: *Eine durch eine Spiegelung σ_g induzierte Punktabbildung $\bar{\sigma}_g$ in $\mathfrak{P}$ besitzt keinen eigentlichen Fixpunkt A, der von $g\pi$ verschieden ist und nicht auf g liegt.*

BEWEIS: Wir führen die Annahme, es gäbe einen eigentlichen Punkt A mit $A\bar{\sigma}_g = A$ und $A \neq g\pi$ und $A \nmid g$, auf einen Widerspruch. Zunächst gilt:

(i) *Ist A ein Punkt mit $A\bar{\sigma}_g = A$ und $A \neq g\pi$ und $A \nmid g$, so gilt $x\bar{\sigma}_g = x$ für alle x aus $\mathfrak{T}$ mit $x \mathrel{I} A$.*

Denn nach Lemma 2 ist der Punkt (x, g) ein Fixpunkt von $\bar{\sigma}_g$. Mithin enthält x die beiden verschiedenen Fixpunkte A und (x, g) und muß daher selbst fix sein.

(ii) *Ist A ein eigentlicher Punkt mit $A\bar{\sigma}_g = A$ und $A \neq g\pi$, $A \nmid g$, so gilt $x\bar{\sigma}_g = x$ für alle x aus $\mathfrak{T}$.*

Nach Definition gilt die Behauptung für $x = g$ und nach Lemma 2 und (i) für alle x mit $x \mathrel{I} g\pi$ oder $x \mathrel{I} A$. Sei endlich x eine Gerade mit $x \neq g$ und $x \nmid A, g\pi$ und sei $(x, g) = B$. Dann gibt es nach Lemma 1 eine Gerade a aus $\mathfrak{T}$ mit $a \mathrel{I} g\pi$ und $a \nmid A, B$, ferner auch ein b aus $\mathfrak{T}$ mit $b \mathrel{I} A$, $(x, a) = C$, denn A ist eigentlich. Nach Lemma 2 und (i) ist $a\bar{\sigma}_g = a$ und $b\bar{\sigma}_g = b$, also $C\,\bar{\sigma}_g = (a, b)\,\bar{\sigma}_g = (a\,\bar{\sigma}_g, b\,\bar{\sigma}_g) = (a, b) = C$, woraus wegen $x\,\bar{\sigma}_g = (B, C)\,\bar{\sigma}_g = (B\,\bar{\sigma}_g, C\,\bar{\sigma}_g) = (B, C) = x$ die Behauptung folgt.

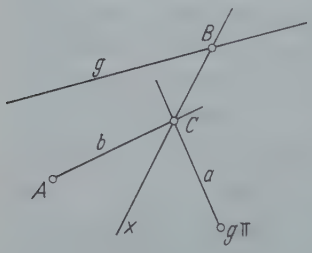

Fig. 1

Nach (ii) führt also unsere Annahme auf den Widerspruch $\sigma_g = 1$.

LEMMA 3. *Keine Gerade aus $\mathfrak{T}$ inzidiert mit ihrem Pol.*

BEWEIS: Sei g eine Gerade aus $\mathfrak{T}$. Dann gibt es nach T 1 eine Spiegelung σ_g an g und nach T 3 einen eigentlichen Punkt P, der nicht mit g inzidiert und von $g\pi$ verschieden ist. Setzen wir $a = (P, g\pi)$, so ist $a \in \mathfrak{T}$ und nach Lemma 2 $a\sigma_g = a$, also $P, P\bar{\sigma}_g \mathrel{I} a$. Nach Lemma 1 gibt es ein b aus $\mathfrak{T}$ mit $g, a \neq b$ und $b \mathrel{I} g\pi$, und ebenso gibt es ein c aus $\mathfrak{T}$ mit $c \neq a$ und $c \mathrel{I} P$ und $c \nmid (g, b)$. Es ist $c \neq b$. Sei $(b, c) = Q$ und d die Gerade aus $\mathfrak{T}$ mit $d \mathrel{I} P, Q\bar{\sigma}_g$.

Nach dem Hilfssatz ist $P \neq P\bar{\sigma}_g$ und daher auch $Q \neq Q\bar{\sigma}_g$. Die Punkte P, $P\bar{\sigma}_g$, Q, $Q\bar{\sigma}_g$ samt ihren sämtlichen Verbindungsgeraden bilden ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalpunkte $C = (c, c\bar{\sigma}_g)$, $D = (d, d\bar{\sigma}_g)$ und $g\pi$ sind. Nach dem Fano-Axiom ist daher $g\pi \nparallel (D, C) = g$, wie behauptet.

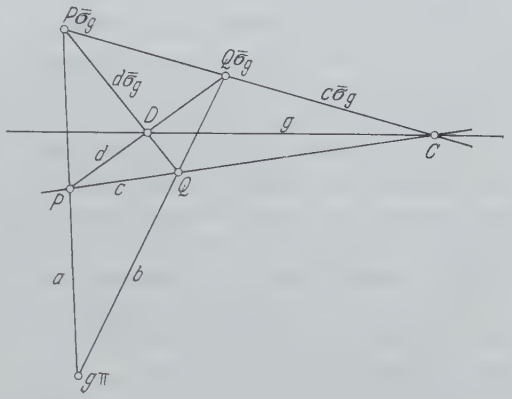

Fig. 2

Bemerkung: Setzt man für $\mathfrak{P}$ die Gültigkeit des Fano-Axioms nicht voraus, fordert man jedoch für die Pol-Polaren beziehung π von $\mathfrak{T}$, daß es eine Gerade g aus $\mathfrak{T}$ mit $g\pi \nparallel g$ gibt, so lehrt die Konfiguration im Beweis von Lemma 3 für dieses Paar $g, g\pi$, daß es ein vollständiges Viereck mit nicht kollinearen Diagonalpunkten gibt. Da $\mathfrak{P}$ eine Pappussche Ebene ist, folgt hieraus die Gültigkeit des Fano-Axioms. Der Schluß im Beweis von Lemma 3 lehrt dann, daß $g \nparallel g\pi$ für alle Geraden aus $\mathfrak{T}$ gilt.

Satz 1. *Die durch eine Spiegelung an einer Geraden g aus $\mathfrak{T}$ induzierte Punktabbildung in $\mathfrak{P}$ stimmt mit der involutorischen Homologie mit $g\pi$ als Zentrum und g als Achse überein.*

Beweis: Nach Lemma 3 ist $g\pi \nparallel g$. Nach § 0, I gibt es eine involutorische Homologie σ mit $g\pi$ als Zentrum und g als Achse. Unsere Behauptung ist, daß $P\sigma = P\bar{\sigma}_g$ für alle Punkte P der Ebene $\mathfrak{P}$ gilt.

Ist $P = g\pi$ oder gilt $P \mathrel{I} g$, so folgt dies nach Definition oder nach Lemma 2. Ist ferner P ein eigentlicher Punkt mit $P \neq g\pi$ und $P \nparallel g$, so ergibt sich die Behauptung für P nach § 0, II und nach der Konstruktion zum Beweis von Lemma 3, denn nach dieser liegen $P, P\bar{\sigma}_g$ harmonisch zu $g\pi$ und (a, g). Hieraus folgt:

(i) *Ist P ein eigentlicher Punkt mit $P \nparallel g$, so gilt $a\sigma = a\bar{\sigma}_g$ für alle Geraden a durch P.*

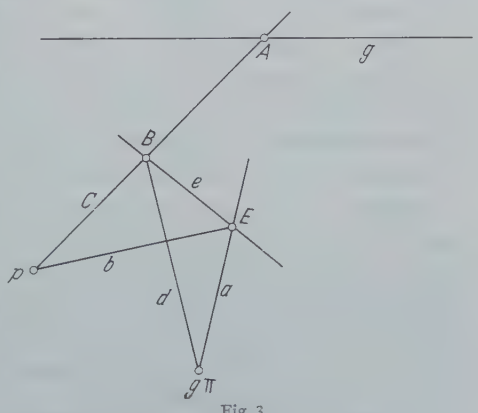

Fig. 3

Sei nun P ein beliebiger, nicht eigentlicher Punkt mit $P \nparallel g$ und $P \neq g\pi$. Nach T 3 gibt es einen eigentlichen Punkt E mit $E \neq g\pi$ und $E \nparallel g$. Wir führen dann die Verbindungsgeraden $a = (E, g\pi)$ und $b = (E, P)$ ein. Nach Lemma 1 gibt es Geraden c, d aus $\mathfrak{T}$ mit $c \mathrel{I} P$; $c \nparallel E, g\pi$; $d \mathrel{I} g\pi$; $d \nparallel E$, $(c, g) = A$. Da E eigentlich ist, gibt es weiter ein e aus $\mathfrak{T}$

mit $e \mathrm{I} E$, $(c,d) = B$. Es ist $e \neq d$ und nach Lemma 2 oder (i) $b\bar{\sigma}_g = b\sigma$; $d\bar{\sigma}_g = d\sigma$; $e\bar{\sigma}_g = e\sigma$. Mithin ergibt sich $B\bar{\sigma}_g = (e,d)\bar{\sigma}_g = (e\bar{\sigma}_g, d\bar{\sigma}_g) = (e\sigma, d\sigma) = (e,d)\sigma = B\sigma$ und $c\bar{\sigma}_g = (A,B)\bar{\sigma}_g = (A\bar{\sigma}_g, B\bar{\sigma}_g) = (A\sigma, B\sigma) = (A,B)\sigma = c\sigma$ und endlich $P\bar{\sigma}_g = (b,c)\bar{\sigma}_g = (b\bar{\sigma}_g, c\bar{\sigma}_g) = (b\sigma, c\sigma) = (b,c)\sigma = P\sigma$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Nach § 0, I ergibt sich als Ergänzung zu T 1 sofort das

KOROLLAR: *Es gibt an einer Geraden aus* $\mathfrak{T}$ *höchstens eine Spiegelung.*

§ 3. Die Bewegungsgruppe der ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur

Wir wollen nun für die Bewegungsgruppe $\mathfrak{B}$ der ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur $\mathfrak{T}$ einige von den Sätzen herleiten, die beim Aufbau der metrischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff an zentraler Stelle stehen. Da die Gruppe $\mathfrak{B}$ nach Satz 1 zu einer Gruppe $\mathfrak{B}^*$ von projektiven Kollineationen isomorph ist, genügt es, diese Gruppe zu untersuchen.

Im folgenden werden wir die durch eine Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{P}$ induzierte involutorische Homologie ebenfalls eine Geradenspiegelung nennen und mit σ_g bezeichnen.

LEMMA 4. *Sind* σ_a, σ_b *Geradenspiegelungen, so ist* $\sigma_a\sigma_b\sigma_a$ *die Spiegelung an der Geraden* $b\sigma_a$.

BEWEIS: Da a, b, a kopunktal sind, ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_a$ nach T 2 eine Geradenspiegelung. Da $b\sigma_a$ punktweise bei $\sigma_a\sigma_b\sigma_a$ festbleibt, ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_a$ die Spiegelung an der Geraden $b\sigma_a$.

LEMMA 5. *Sind* a, b *Geraden aus* $\mathfrak{T}$, *so ist genau dann* $a \perp b$, *wenn* $\sigma_a\sigma_b$ *involutorisch ist. Ist* $\sigma_a\sigma_b$ *involutorisch, so ist* $\sigma_a\sigma_b$ *eine involutorische Homologie mit* (a,b) *als Zentrum und* $(a\pi, b\pi)$ *als Achse.*

BEWEIS: Aus $a \perp b$ folgt $a \mathrm{I} b\pi$ und $a\pi \mathrm{I} b$, also ist nach III aus § 0 $\sigma_a\sigma_b$ involutorisch. Der Schluß ist nach III aus § 0 umkehrbar. Die letzte Behauptung von Lemma 5 folgt ebenfalls aus § 0, III.

SATZ 2 (Transitivitätssatz). *Ist* $\sigma_a \neq \sigma_b$ *und sind* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$, $\sigma_a\sigma_b\sigma_d$ *Geradenspiegelungen, so ist auch* $\sigma_a\sigma_c\sigma_d$ *eine Geradenspiegelung.*

BEWEIS: Nach T 2 folgt aus den Voraussetzungen in Satz 2: a, b, c und a, b, d sind kopunktal. Mithin sind wegen $a \neq b$ auch a, c, d kopunktal, und damit ist $\sigma_a\sigma_c\sigma_d$ nach T 2 eine Geradenspiegelung.

Als Ergänzung zu T 2 gilt:

LEMMA 6. *Ist* $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ *eine Geradenspiegelung* σ_d, *so sind* a, b, d *kopunktal.*

BEWEIS: Ist $a = b$, so ist nichts zu beweisen. Sei also $a \neq b$ und $A = (a,b)$. Nach T 2 ist dann auch $c \mathrm{I} A$. Ferner muß $c \neq d$ gelten. Aus $A\sigma_a\sigma_b\sigma_c = A$ folgt $A\sigma_d = A$, also $A = d\pi$ oder — wie behauptet — $d \mathrm{I} A$. Der erste Fall führt auf einen Widerspruch: Ist $d\pi = A$, also $c \mathrm{I} d\pi$, so gilt $d \perp c$ und damit ist $\sigma_d\sigma_c$ nach Lemma 5 eine involutorische Homologie mit (c,d) als Zentrum. Wegen $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$ ist auch $\sigma_a\sigma_b$ involutorisch, mithin nach Lemma 5 eine involutorische Homologie mit $(a,b) = A$ als Zentrum. Hieraus folgt $A = (c,d)$ und damit $d \mathrm{I} A = d\pi$, im Widerspruch zu Lemma 3.

Die Menge der Geradenspiegelungen in der Gruppe $\mathfrak{B}^*$ hat nach Definition und nach Lemma 4 und Satz 2 folgende Eigenschaften:

G 0. *Die Geradenspiegelungen sind involutorische Elemente einer Gruppe; es gibt mindestens zwei Geradenspiegelungen.*

G 1. *Eine Geradenspiegelung, mit einer Geradenspiegelung transformiert, ist eine Geradenspiegelung.*

G 2. *Für die Geradenspiegelungen gilt der Transitivitätssatz.*

Wie in [1], § 4,5 ausgeführt, hat das System der Eigenschaften G 0—G 2 wichtige Konsequenzen. Von diesen brauchen wir hier die Tatsache, daß aus G 0—G 2 der Gegenpaarungssatz folgt. Eine Gegenpaarung in einem Büschel kopunktaler Geraden aus $\mathfrak{T}$ definiert man dabei wie folgt:

Sind a, b zwei Geraden des Büschels, so ist $\sigma_a \sigma_x \sigma_b$ nach T 2 für jede Gerade x des Büschels eine Geradenspiegelung σ_y, wobei die Gerade y nach Lemma 6 ebenfalls dem Büschel angehört. Die Abbildung γ_{ab} mit $x\gamma_{ab} = y$ heißt dann die durch a, b definierte Gegenpaarung in dem Büschel. γ_{ab} ist eine eineindeutige Abbildung des Geradenbüschels auf sich.

Der Gegenpaarungssatz lautet dann:

Satz 3 (Gegenpaarungssatz). *$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, g$ seien Geraden aus $\mathfrak{T}$, welche folgenden Voraussetzungen genügen: a_1, a_2, a_3 sind kopunktal; $b_2 = a_2\gamma_{a_1 b_1}$; $b_3 = a_3\gamma_{a_1 b_1}$; c_i, a_k, c_l sind kopunktal für jede Permutation i, k, l von 1, 2, 3; $\sigma_{c_1}\sigma_{b_1} \neq \sigma_{c_2}\sigma_{b_2}$* (Nebenvoraussetzung); *c_1, b_1, g und c_2, b_2, g sind kopunktal. Dann sind c_3, b_3, g kopunktal.*

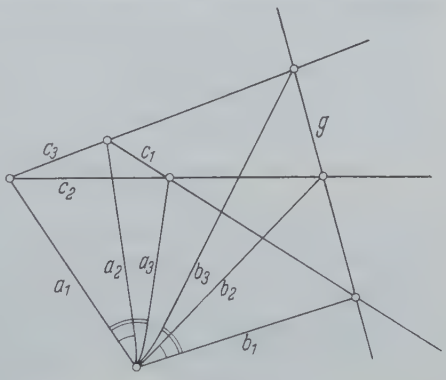

Fig. 4

Man beachte, daß in den bisher geführten Beweisen die Eineindeutigkeit der Abbildung π, also die Eineindeutigkeit der Abbildung φ nicht wesentlich benutzt wird. Sie wird nur an einer Stelle verwandt, nämlich beim Beweis von Lemma 2 b). Nimmt man jedoch die Eigenschaft b) mit in die Definition einer Spiegelung, so gelten unsere Überlegungen in diesen beiden Paragraphen auch für den Fall einer singulären, d.h. eindeutigen, aber nicht eineindeutigen Pol-Polarenbeziehung, wie sie in Teil B behandelt werden wird.

§ 4. Fortsetzung der Pol-Polarenbeziehung

Wir wollen nun die ordinäre Pol-Polarenbeziehung $\pi = (\varphi, \varphi^{-1})$ in $\mathfrak{T}$ zu einer projektiven Polarität in $\mathfrak{P}$ fortsetzen. Wir erklären dazu zunächst eine Fortsetzung $\bar{\psi}$ der Abbildung $\psi = \varphi^{-1}$ der Menge der Punkte von $\mathfrak{T}$ auf die Menge ihrer Polaren in $\mathfrak{T}$:

Seien P ein Punkt von $\mathfrak{P}$ und a, b zwei verschiedene Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch P und $a\pi, b\pi$ deren Pole. Dann heißt die Gerade $(a\pi, b\pi)$ eine *Polare* $P\bar{\psi}$ des Punktes P.

Für die Abbildung $\bar{\psi}$ zeigen wir schrittweise:

(i) *$\bar{\psi}$ ist eine eindeutige Abbildung der Menge der Punkte von $\mathfrak{P}$ in die Menge der Geraden von $\mathfrak{P}$.*
(ii) *Es gilt $P\bar{\psi} = P\psi$ für alle Punkte P aus $\mathfrak{T}$.*
(iii) *$\bar{\psi}$ ist eine eineindeutige Abbildung.*
(iv) *$\bar{\psi}$ bildet die Menge der Punkte von $\mathfrak{P}$ auf die Menge der Geraden von $\mathfrak{P}$ ab.*
(v) *Aus $P \mathrm{I} g$ folgt $P\bar{\psi} \mathrm{I} g\bar{\psi}^{-1}$ für alle P, g aus $\mathfrak{P}$, d.h. $\bar{\varphi} = \bar{\psi}^{-1}$ hat die Eigenschaft $(*)$.*
(vi) *$\bar{\psi}$ ist eine projektive Abbildung.*

Nach § 1 bedeuten die Eigenschaften (i)—(vi), daß das Paar $\bar{\pi} = (\bar{\varphi}, \bar{\varphi}^{-1})$ eine projektive Polarität in $\mathfrak{P}$ ist, die für die Punkte und Geraden aus $\mathfrak{T}$ mit π übereinstimmt.

Die Eigenschaft (ii) folgt sofort wegen $P\psi = P\pi = (a\pi, b\pi)$ für alle P aus $\mathfrak{T}$. (i) ergibt sich aus

LEMMA 7. *Zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{P}$ gibt es genau eine Polare.*

BEWEIS: Die Existenz wenigstens einer Polaren zu P folgt sofort aus Lemma 1. Die Eindeutigkeit der Polare eines Punktes ergibt sich, wenn wir gezeigt haben:

(a) *Ist P ein Punkt von $\mathfrak{P}$ und sind a, b, c Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch P, so sind die Pole von a, b, c kollinear.*

Wir nehmen an, die Pole $A = a\pi$, $B = b\pi$, $C = c\pi$ seien nicht kollinear. Dann sind a, b, c voneinander verschieden. Durch Umbenennen können wir stets erreichen, daß A, B, P nicht kollinear sind. Nach T 2 und Lemma 6 ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ eine Geradenspiegelung σ_d mit $d \mathrm{I} P$. Sei F der Schnittpunkt von (A, B) mit d, dann ist $F \neq C$ und $F\sigma_a\sigma_b\sigma_c = F\sigma_d = F$, also $F\sigma_a\sigma_b = F\sigma_c$. Offenbar gilt $(A, B)\sigma_a\sigma_b = (A, B)$ und somit $F\sigma_c \mathrm{I} (A, B)$. Da auch $F\sigma_c \mathrm{I} (F, C)$ und $(A, B) \neq (F, C)$ und $F \mathrm{I} (A, B), (F, C)$ gilt, muß $F = F\sigma_c$, mithin wegen $F \neq C$ dann $F \mathrm{I} c$ gelten. Aus $F, P \mathrm{I} c, d$ und $F \neq P$ ergibt sich $c = d$, also $\sigma_c = \sigma_d$ und damit $\sigma_a = \sigma_b$, im Widerspruch zu $a \neq b$.

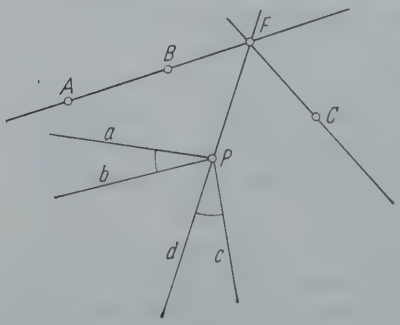

Fig. 5

Man beachte, daß der Beweis von (a) keinen Gebrauch von der Eineindeutigkeit der Abbildung φ macht. Wir werden also die Aussage (a) auch in Teil B verwenden können.

Vor dem Beweis von (iii) leiten wir her:

LEMMA 8. *Die Polare eines eigentlichen Punktes P inzidiert nur mit Polen von Geraden durch P, d.h. nur mit Punkten aus $\mathfrak{T}$. Insbesondere inzidiert P nicht mit seiner Polaren.*

BEWEIS: Sei $p = P\bar{\psi}$ die Polare des Punktes P. Wir beweisen zuerst die letzte Aussage von Lemma 8. Wäre $P \mathrm{I} p$, so wäre p eine Gerade aus $\mathfrak{T}$, da

P eigentlich ist. Seien dann a, b zwei verschiedene Geraden durch P, so gilt $a\pi, b\pi \mathrel{I} p$, also $a, b \mathrel{I} p\pi$ und damit $p\pi = P$, im Widerspruch zu Lemma 3. Also gilt $p \not\mathrel{I} P$.

Sei nun A ein beliebiger Punkt auf p und $b = (A, P)$. Dann ist nach Lemma 7 $b\pi \mathrel{I} p$. Für die Gerade $a = (P, b\pi)$ gilt $a\pi \mathrel{I} p$ und $a\pi \mathrel{I} b$, also $A = a\pi$, und A ist Pol der Geraden a durch P.

Auch in diesem Beweis wird lediglich die Eindeutigkeit, aber nicht die Eineindeutigkeit der Abbildung φ benutzt, so daß wir auch ihn in den Teil B übernehmen können.

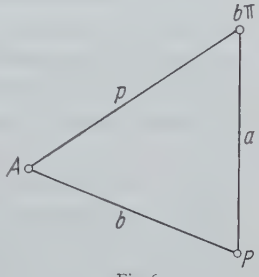

Fig. 6

Lemma 9. *Die Polaren zweier verschiedener Punkte von $\mathfrak{P}$ sind verschieden.*

Beweis: Seien A, B zwei Punkte, deren Polaren $a = A\bar{\varphi}$, $b = B\bar{\varphi}$ identisch sind. Wir nehmen an, es wäre $A \neq B$. Nach T 3 gibt es einen eigentlichen Punkt E mit $E \not\mathrel{I} (A, B)$. Die Verbindungsgeraden $c = (E, A)$ und $d = (E, B)$ sind voneinander verschiedene Geraden von $\mathfrak{T}$, deren Pole nach Lemma 7 mit $a = b$ inzidieren. Nach Definition muß dann a auch die Polare des Punktes E sein. Nach Lemma 8 sind damit sämtliche Punkte auf a Pole von Geraden durch E, andererseits aber liegen auch die Pole aller Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch A oder durch B auf der Geraden a, woraus $A = E = B$, im Widerspruch zur Annahme folgt.

Mit Lemma 9 ist (iii) bewiesen.

Lemma 10. *Jede Gerade g aus $\mathfrak{P}$ inzidiert mit wenigstens zwei verschiedenen Punkten aus $\mathfrak{T}$.*

Beweis: Nach T 3 gibt es drei nicht kollineare eigentliche Punkte P, Q, R. Deren Polaren p, q, r sind nicht kopunktal, denn aus $S \mathrel{I} p, q, r$ folgt nach Lemma 8, daß ein s mit $S = s\pi$ und $s \mathrel{I} P, Q, R$ vorhanden ist, was der Wahl von P, Q, R widerspricht. Damit schneidet die Gerade g die Geraden p, q, r in mindestens zwei voneinander verschiedenen Punkten, die nach Lemma 8 der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehören.

Lemma 11. *Jede Gerade g aus $\mathfrak{P}$ ist Polare eines Punktes P von $\mathfrak{P}$.*

Beweis: Sind A, B zwei nach Lemma 10 mit g inzidierenden verschiedenen Punkte aus $\mathfrak{T}$ und a, b deren Polaren, so ist $a \neq b$ und g ist Polare des Punktes $P = (a, b)$.

Mit Lemma 11 ist (iv) bewiesen. Wir nennen $g\bar{\varphi}^{-1}$ den Pol der Geraden g aus P. Wegen (ii) stimmt diese Bezeichnung für alle Geraden aus $\mathfrak{T}$ mit der in § 1 gegebenen überein.

Der Beweis von (v) ist mühevoller als die bisher geführten Nachweise. Zunächst gilt folgende Teilaussage von (v):

(v′) *Aus $P \mathrel{I} g$ folgt $P\bar{\varphi} \mathrel{I} g\bar{\varphi}^{-1}$, wenn wenigstens eines der Elemente P, g in $\mathfrak{T}$ liegt.*

Denn ist $g \in \mathfrak{T}$, so ist $g\bar{\varphi}^{-1} = g\pi$ nach Lemma 7 ein Punkt der Polaren $P\bar{\varphi}$ von P. Und ist $P \in \mathfrak{T}$, also $P = p\pi$ mit $p \in \mathfrak{T}$, so ist nach dem Beweis von

Lemma 11 der Pol $g\psi^{-1}$ von g darstellbar als Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden a, b aus $\mathfrak{T}$ mit $a\pi, b\pi \mathrel{I} g$. Wäre $p = P\psi \mathrel{I} g\bar{\psi}^{-1}$, wären also a, b, p nicht kopunktal, so hätten die drei verschiedenen Punkte (a, b), (a, p), (b, p) dieselbe Polare, nämlich g, da $a\pi, b\pi, p\pi \mathrel{I} g$ gilt. Dies widerspricht Lemma 9.

Wir merken hier an, daß wir das Senkrechtstehen in $\mathfrak{T}$ zu einem Senkrechtstehen in $\mathfrak{P}$ fortsetzen können, indem wir zwei Geraden g, h zueinander senkrecht nennen, wenn g mit dem Pol der Geraden h inzidiert. Nach dem bisherigen ist allerdings noch nicht klar, ob das hiermit definierte Senkrechtstehen in $\mathfrak{P}$ auch symmetrisch ist. Nach (v') gilt dies zunächst nur für Geradenpaare g, h ,in denen wenigstens eine Gerade der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehört: Aus $g \perp h$ folgt $g \mathrel{I} h\bar{\psi}^{-1}$ und weiter, da entweder g oder h, also entweder g oder $h\bar{\psi}^{-1}$ ein Element von $\mathfrak{T}$ ist, nach (v') $h = (h\bar{\psi}^{-1})\,\bar{\psi} \mathrel{I} g\bar{\psi}^{-1}$, also $h \perp g$.

Der Beweis von (v) geht über den Beweis einer Teilaussage von (vi):

LEMMA 12. *Ist e die Polare eines eigentlichen Punktes E, so bildet ψ die Menge der Punkte auf e projektiv auf die Menge der Geraden durch E ab.*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst mit fast wörtlich aus [1], § 4,8 übertragenem Beweis, daß jede Gegenpaarung γ_{ab} in dem Büschel der Geraden durch E projektiv ist.

Sei zunächst $a \neq b$ und a' eine Gerade $\neq a, b$ durch E (nach T 3 gibt es eine solche Gerade). Dann ist $b' = a'\gamma_{ab} \neq a, b$, weil sonst $a' = a$ oder $a' = b$ folgte. Nach T 3 gibt es dann auf a, b, b' nicht kollineare eigentliche Punkte A, B, $B' \neq E$. Es sei $v = (A, B')$ und $g = (B, B')$. Ferner führen wir die Geraden $p = (A, B)$ und die Gerade q ein, welche B mit (a', v) verbindet. Die Perspektivitätenkette

$$a, a' \underset{E}{\overset{v}{\wedge}} p, q \underset{B}{\overset{a'}{\wedge}} p, v \underset{A}{\overset{g}{\wedge}} b, b',$$

bei der niemals die Perspektivitätsachse mit den Büschelzentren inzidiert, führt a, a' in b, b' über.

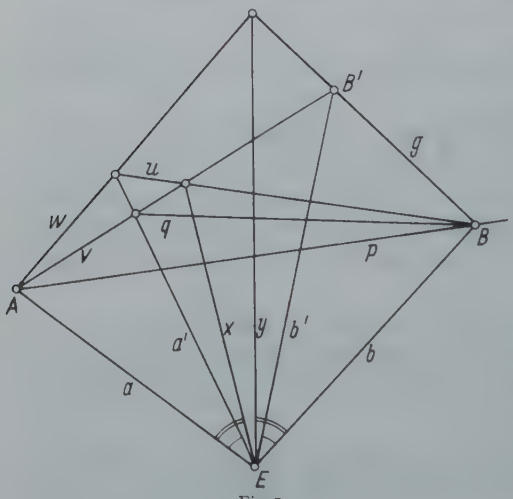

Fig. 7

Sei nun x eine beliebige Gerade durch E und $y = x\gamma_{ab}$. Wir führen die Gerade u ein, welche B mit (x, v) verbindet und die Gerade w, welche A mit (a', u) verbindet. Auf die Geraden a, a', x und $a\gamma_{ab} = b$, $a'\gamma_{ab} = b'$, $x\gamma_{ab} = y$ wenden wir den Gegenpaarungssatz an (die Nebenvoraussetzung $\sigma_u\sigma_b \neq \sigma_v\sigma_{b'}$ ist erfüllt) und schließen: Da u, b, g und v, b', g kopunktal sind, sind es auch w, y, g. Die angegebene Perspektivitätenkette führt dann x in u, weiter u in w und nach dem Bewiesenen w in y, also x in y über. Mithin ist γ_{ab} für $a \neq b$ projektiv.

Die Gegenpaarung γ_{aa} ist ebenfalls projektiv, da offenbar $x\gamma_{aa} = x\sigma_a$ für alle Geraden x durch E gilt und σ_a eine projektive Kollineation ist.

Wir überlegen nun, daß die eineindeutige Abbildung ϱ des Büschels der Geraden durch E auf sich, welche jeder Geraden durch E die zu ihr senkrechte Gerade durch E zuordnet, eine projektive Abbildung ist. Sie kann nämlich durch Hintereinanderausführen zweier Gegenpaarungen, also zweier projektiver Abbildungen erzeugt werden: Sind $a, \bar{a}$ zwei zueinander senkrechte Geraden durch E, so gilt $x\varrho = x\gamma_{aa}\gamma_{a\bar{a}}$ für alle x mit $x\,\mathfrak{I}\,E$. Denn ist $y = x\gamma_{aa}\gamma_{a\bar{a}}$, so gilt $\sigma_y = \sigma_a(\sigma_a\sigma_x\sigma_a)\,\sigma_{\bar{a}}$ also $\sigma_y = \sigma_x\sigma_a\sigma_{\bar{a}}$ und damit $\sigma_x\sigma_y = \sigma_a\sigma_{\bar{a}}$. Aus $a \perp \bar{a}$ folgt aber nach Lemma 5, daß $\sigma_a\sigma_{\bar{a}}$ und damit auch $\sigma_x\sigma_y$ involutorisch ist, was — ebenfalls nach Lemma 5 — $x \perp y$ bedeutet.

Nun können wir die Behauptung von Lemma 12 herleiten: Sei P ein beliebiger Punkt auf e, dann ist $(P, E) \perp P\bar{\psi} = P\pi$ wegen $P\,\mathfrak{I}\,(P, E)$. Also gilt $(P, E)\,\varrho = P\bar{\psi}$. Da nun die Abbildung $P \to (P, E)$ eine Perspektivität und die Abbildung ϱ projektiv ist, ist die durch Hintereinanderausführen dieser Abbildungen entstehende Abbildung $P \to P\bar{\psi}$ projektiv, was zu beweisen war.

Aus Lemma 12 werden wir sogleich die Gültigkeit des Satzes über den Schnittpunkt der Höhen in einem Dreieck erschließen, welches wenigstens einen eigentlichen Eckpunkt hat. Man beachte hierbei, daß in einem solchen Dreieck in den Paaren Seite-Höhe stets eine Gerade der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehört, so daß für sie nach unseren oben gemachten Bemerkungen das Senkrechtstehen symmetrisch ist. Die Höhen in einem solchen Dreieck sind die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Polen der gegenüberliegenden Seite, sofern die Ecken von diesen verschieden sind.

Satz 4 (Höhensatz): *Die Höhen in einem nicht ausgearteten Dreieck, dessen Ecken nicht die Pole der gegenüberliegenden Seite sind und das einen eigentlichen Eckpunkt hat, sind kopunktal.*

Beweis: Seien A, B, C die nicht kollinearen Eckpunkte des Dreiecks und A ein eigentlicher Punkt. Die Seiten (A, B), (A, C), (B, C) bezeichnen wir mit c, b, a und die Höhen von A, B, C auf a, b, c mit $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Wir dürfen voraussetzen, daß die Höhen voneinander verschieden sind, da anderenfalls die Behauptung des Satzes unmittelbar folgt. Ist $(\bar{b}, \bar{c}) = A$, so gilt wegen $\bar{a}\,\mathfrak{I}\,A$ die Behauptung ebenfalls. Sei also $A \neq (\bar{b}, \bar{c}) = H$ und $a' = (H, A)$. Können wir zeigen, daß $a' \perp a$ ist, so muß wegen $\bar{a}, a'\,\mathfrak{I}\,a\bar{\psi}^{-1}$, A und $A \neq a\bar{\psi}^{-1}$ $\bar{a} = a'$, also unsere Behauptung gelten.

Wir führen die Polare $\tilde{a}$ von A und die Schnittpunkte $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ von a, b, c mit $\tilde{a}$ ein. Die Pole der Geraden a, b, c bezeichnen wir mit A', B', C' (Fig. 8).

Die eineindeutige, involutorische Abbildung σ der Geraden $\tilde{a}$ auf sich mit

$$X\sigma = (X\pi, \tilde{a}) \qquad \text{für alle } X \text{ mit } X\,\mathfrak{I}\,\tilde{a}$$

ist nach Lemma 12 projektiv. Für sie gilt $B'\sigma = (B'\pi, \tilde{a}) = (b, \tilde{a}) = \overline{B}$ und $C'\sigma = (C'\pi, \tilde{a}) = (c, \tilde{a}) = \overline{C}$, und damit auch $\overline{B}\sigma = B'$ und $\overline{C}\sigma = C'$.

Wir betrachten nun die Perspektivitätenkette σ' mit

$$B', C', \overline{B}, \overline{C} \overset{C}{\underset{A}{=}} \tilde{B}', \tilde{C}', A, \overline{C} \overset{B'}{=} C, \tilde{C}', \tilde{A}, C' \overset{A}{=} \overline{B}, \overline{C}, B', C',$$

die die Punktreihe $\tilde{a}$ nacheinander auf die Punktreihen $c, \bar{c}, \tilde{a}$ abbildet. Die beiden projektiven Abbildungen σ, σ' stimmen in den drei verschiedenen

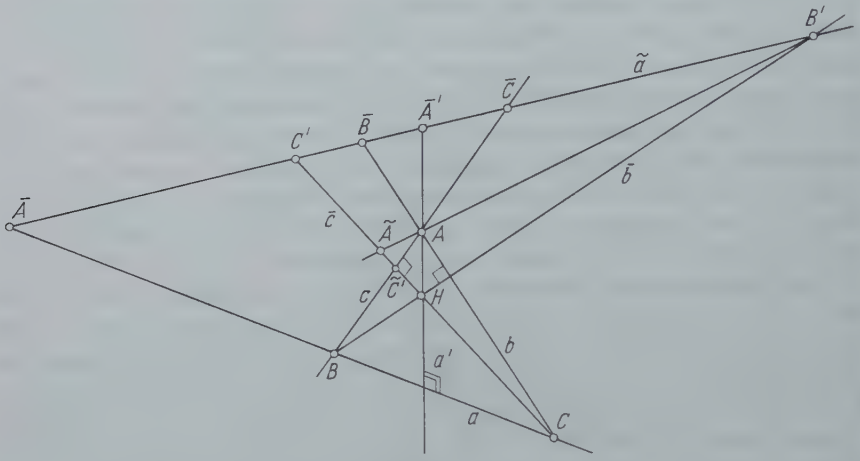

Fig. 8

Punkten $B', C', \bar{B}$ überein und müssen daher nach dem Fundamentalsatz identisch sein. Da nun die Perspektivitätenkette σ' nacheinander $\bar{A}$ in B,

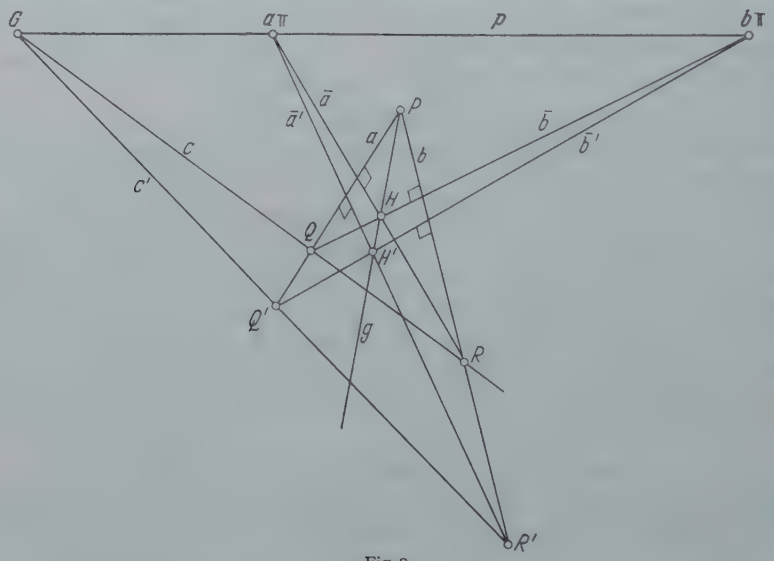

Fig. 9

B in H, H in $\bar{A}' = (a', \tilde{a})$ überführt, gilt $\bar{A}\sigma = (A\pi, \tilde{a}) = \bar{A}'$ und damit $\bar{A}\pi = (A, \bar{A}') = a'$. Aus $a'\pi = \bar{A}\, \mathrm{I}\, a$ folgt dann $a \perp a'$ und damit $a' \perp a$, wie behauptet.

Nunmehr können wir an den Beweis von (v) gehen. Nach (v') dürfen wir voraussetzen, daß $P, g \notin \mathfrak{T}$ gilt. Wir setzen $P\bar{\psi} = p$ und $g\bar{\psi}^{-1} = G$ (Fig. 9). Es gibt offenbar eine Gerade a durch P, welche mit wenigstens einem eigentlichen

Punkt, also nach T 3 mit wenigstens drei verschiedenen eigentlichen Punkten inzidiert. Wir können damit auf a zwei eigentliche Punkte Q, Q' so wählen, daß $Q, Q' \neq P$ ist. Q, Q' inzidieren nicht mit p, da $P \notin \mathfrak{T}$, also $p \notin \mathfrak{T}$ gilt. Wir wählen dann eine Gerade $b \neq a$ aus $\mathfrak{T}$ mit $b \mathrel{I} P$ und $b \not\perp a$. Nach Lemma 7 gilt $a\pi, b\pi \mathrel{I} p$. Wegen $g \notin \mathfrak{T}$ ist $g \neq a, b$.

Wir konstruieren nun zwei Dreiecke, die P als Eckpunkt, a, b als Seiten, g als Höhe und Q bzw. Q' als Eckpunkt haben. Wir führen nämlich die Verbindungsgeraden $\bar{b}, \bar{b}'$ von Q, Q' mit $b\pi$ ein, verbinden die Schnittpunkte H, H' von g mit $\bar{b}, \bar{b}'$ mit $a\pi$ durch Geraden $\bar{a}, \bar{a}'$ und ziehen die Verbindungsgeraden c, c' von $R = (b, \bar{a})$ mit Q und von $R' = (b, \bar{a}')$ mit Q'. Nach Konstruktion ist $P \neq Q, Q', H, H', R, R'$ und kein Eckpunkt der Dreiecke PQR, $PQ'R'$ Pol der gegenüberliegenden Seite. Nach dem Höhensatz für diese beiden Dreiecke folgt dann $c, c' \perp g$, also $c\pi, c'\pi \mathrel{I} g$. Also ist — wegen $c \neq c'$ — $G = (c, c')$. Da die beiden Dreiecke QHR und $Q'H'R'$ perspektiv in bezug auf den Punkt P liegen und sich zwei Paare entsprechender Seiten auf p (nämlich in $a\pi$ und $b\pi$) schneiden, müssen sich nach dem Satz von DESARGUES auch c, c' auf p schneiden. Mithin gilt $G = (c, c') \mathrel{I} p$, wie behauptet.

Mit dem Beweis von (i)—(v) ist gezeigt, daß $\bar{\pi} = (\bar{\psi}^{-1}, \bar{\psi})$ eine Polarität ist. Da ψ nach Lemma 12 mindestens eine Punktreihe projektiv abbildet, ist sie nach § 0, III projektiv. Damit gilt auch (vi) und somit der erste Teil des nachstehenden Theorems:

THEOREM 1. *Eine in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ erklärte ordinäre projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, für welche die Forderungen* T 1, T 2, T 3 *erfüllt sind, läßt sich in eine ordinäre projektiv-metrische Struktur der Ebene $\mathfrak{P}$ einbetten, deren absolute Polarität $\bar{\pi}$ mit der Pol-Polarenbeziehung π in $\mathfrak{T}$ übereinstimmt.*

Die Bewegungsgruppe von $\mathfrak{T}$ ist einer Untergruppe der Bewegungsgruppe der ordinären projektiv-metrischen Ebene mit $\bar{\pi}$ als absoluter Polarität isomorph.

Der zweite Teil von Theorem 1 ist unmittelbar klar: Nach Satz 1 induziert jede Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ eine involutorische Homologie in $\mathfrak{P}$, die ein Paar Pol-Polare hinsichtlich π, also auch hinsichtlich $\bar{\pi}$ als Zentrum und Achse hat. Derartige involutorische Homologien erzeugen aber die Bewegungsgruppe der ordinären projektiv-metrischen Ebene mit $\bar{\pi}$ als absoluter Polarität.

B. Singuläre projektiv-metrische Teilstrukturen

Wir wollen nun singuläre projektiv-metrische Teilstrukturen betrachten und für sie ein entsprechendes Theorem über ihre Einbettbarkeit in eine singuläre projektiv-metrische Ebene herleiten, wie wir es in Teil A für die ordinären projektiv-metrischen Teilstrukturen aufstellen konnten.

Wir legen wieder eine projektive Ebene $\mathfrak{P}$ zugrunde.

Sei $\mathfrak{m}$ eine Menge von Geraden und $\mathfrak{M}$ eine Menge von Punkten der Ebene $\mathfrak{P}$ und φ eine eindeutige, jedoch nicht eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

($^{**}_{*}$) *Aus $P \mathrel{I} g$ für $g \in \mathfrak{m}$ und $P \in \mathfrak{M}$ folgt $p \mathrel{I} g\varphi$ für alle Geraden p aus $\mathfrak{m}$ mit $p\varphi = P$.*

Wir nennen $g\varphi$ den Pol der Geraden g und jede Gerade p mit $p\varphi = P$ eine Polare des Punktes P. Die Abbildung φ wollen wir eine *singuläre Pol-Polarenbeziehung* nennen.

Ein Paar $\mathfrak{T} = (\mathfrak{m}, \mathfrak{M})$ aus einer Menge $\mathfrak{m}$ von Geraden und einer Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten der Ebene $\mathfrak{P}$ nennen wir eine *singuläre projektiv-metrische Teilstruktur*, wenn zwischen den Elementen von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ eine singuläre Pol-Polarenbeziehung definiert ist. Im folgenden sei $\mathfrak{T}$ stets eine singuläre projektiv-metrische Teilstruktur. Wir definieren zunächst für $\mathfrak{T}$ die gleichen Begriffe wie in Teil A für die ordinären projektiv-metrischen Teilstrukturen.

Zwei Geraden g, h aus $\mathfrak{T}$ heißen zueinander *senkrecht*, geschrieben $g \perp h$, wenn g mit dem Pol der Geraden h [und daher nach $(\overset{**}{*})$ h auch mit dem Pol der Geraden g] inzidiert. Das Senkrechtstehen ist symmetrisch. Zwei Punkte P, Q aus $\mathfrak{T}$ heißen zueinander *polar*, wenn P mit einer Polaren von Q [und damit nach $(\overset{**}{*})$ auch Q mit einer Polaren von P] inzidiert.

Eine eineindeutige, involutorische Abbildung σ der Menge $\mathfrak{m}$ auf sich, bei der kopunktale Geraden in kopunktale Geraden und zueinander senkrechte Geraden in zueinander senkrechte Geraden übergehen, heißt eine *Spiegelung an der Geraden* g aus $\mathfrak{T}$, wenn sie alle Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch $g\varphi$ festläßt[2]) und wenn $(**)$ aus Teil A für sie gilt. Eine Spiegelung an der Geraden g bezeichnen wir mit σ_g.

Jedes Produkt aus Spiegelungen an Geraden aus $\mathfrak{T}$ nennen wir eine *Bewegung* von $\mathfrak{T}$. Die Bewegungen von $\mathfrak{T}$ bilden eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe* $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{T}$.

Wir betrachten nun singuläre projektiv-metrische Teilstrukturen $\mathfrak{T}$, für welche die Forderungen T 1—T 3 aus Teil A erfüllt sind, und wollen zeigen, daß für sie die singuläre Pol-Polarenbeziehung φ eine projektive fixpunktfreie Involution $\mathfrak{l}$ auf einer Geraden o von $\mathfrak{P}$ so bestimmt, daß die Teilstruktur $\mathfrak{T}$ in die singuläre projektiv-metrische Struktur der Ebene $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\mathfrak{l}$ als absoluter Polarinvolution eingebettet ist. Es wird sich nämlich herausstellen, daß die Punkte von $\mathfrak{T}$, d.h. die Pole der Geraden aus $\mathfrak{T}$, genau die sämtlichen Punkte auf einer Geraden o der Ebene $\mathfrak{P}$ sind, daß jeder Punkt aus $\mathfrak{T}$ genau einen zu ihm polaren Punkt besitzt und daß $\mathfrak{l}$ die Abbildung auf o ist, die jedem Punkt auf o den zu ihm polaren Punkt zuordnet.

Für eine singuläre projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, für welche T 1—T 3 erfüllt sind, gelten Lemma 1—6 und Satz 1—3 aus Teil A, da die Beweise derselben wörtlich übernommen werden können, mit Ausnahme des Beweises von Teil b) in Lemma 2, da die erste Aussage in der Eigenschaft (3) auf S. 371 hier keinen Sinn hat. b) in Lemma 2 folgt aber nach Definition einer Spiegelung hier direkt.

Wir untersuchen nun die singuläre Pol-Polarenbeziehung. Sie ist nach Voraussetzung nicht eindeutig. Es gibt also mindestens einen Punkt aus $\mathfrak{M}$, der mehr als eine Polare hat. Die Menge aller Punkte aus $\mathfrak{M}$, die mehr als eine Polare haben, bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}'$. Es gilt dann:

[2]) Diese Eigenschaft ist aus $(**)$ beweisbar, wenn für die singuläre projektiv-metrische Teilstruktur T die Forderungen T 1—T 3 aus Teil A erfüllt sind.

(i) *Zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{M}'$ gibt es genau einen polaren Punkt Q. Dieser ist von P verschieden und Pol aller Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch P, also ebenfalls ein Punkt von $\mathfrak{M}'$.*

Denn seien p, p' zwei verschiedene Polaren von P, so folgt aus $x \mathrel{I} P = p\varphi = p'\varphi$ nach $(^{*}_{*}{}^{*}_{*})$ $x\varphi \mathrel{I} p, p'$, also $x\varphi = (p, p') = Q$ für alle Geraden x durch P. Der Punkt Q ist zu P polar und Pol aller Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch P und damit nach Lemma 3 von P verschieden.

Sei nun Q' ein weiterer zu P polarer Punkt, dann ist auch P zu Q' polar und inzidiert mit einer Geraden q', für welche $q'\varphi = Q'$ gilt. Damit ist nach dem eben Überlegten $Q' = Q$, womit (i) bewiesen ist.

Da sich zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{M}'$ und jedem eigentlichen Punkt E eine Gerade aus $\mathfrak{T}$ finden läßt, die mit E und dem zu P polaren Punkt Q inzidiert, gilt nach (i):

(ii) *Jeder Punkt aus $\mathfrak{M}'$ hat eine Polare durch jeden eigentlichen Punkt.*

Aus (ii) folgt sofort mit der Aussage (a) im Beweis von Lemma 7, deren Beweis auch hier wörtlich richtig bleibt:

(iii) *Alle Punkte von $\mathfrak{M}'$ liegen auf einer Geraden.*

Da $\mathfrak{M}'$ nach Voraussetzung und (i) mindestens zwei verschiedene Punkte enthält, ist die Gerade, welche die Punkte von $\mathfrak{M}'$ trägt, eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie mit o. Ist E ein beliebiger eigentlicher Punkt, so liegen nach (a) aus dem Beweis von Lemma 7 die Pole aller Geraden durch E auf o. Andererseits lehrt der gleiche Schluß wie für Lemma 8:

(iv) *Jeder Punkt auf o hat durch jeden eigentlichen Punkt eine Polare und ist damit ein Punkt von $\mathfrak{M}'$.*

Endlich gilt:

(v) *Jeder Punkt P von $\mathfrak{M}$ ist ein Punkt von $\mathfrak{M}'$, d.h. es gilt $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$.*

Denn sei E ein eigentlicher Punkt und a eine Gerade, die mit P und E inzidiert, so ist $a\varphi \mathrel{I} o$ und damit nach (iv) $a\varphi \in \mathfrak{M}'$, also nach (i) auch $P \in \mathfrak{M}'$, da P zu $a\varphi$ polar ist.

Aus (v), (iii), (iv), (i) ergibt sich der

Satz 5. *Die Punkte einer singulär projektiv-metrischen Teilstruktur $\mathfrak{T}$ sind die sämtlichen Punkte einer Geraden o von $\mathfrak{P}$. Zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{T}$ gibt es genau einen polaren Punkt Q. Dieser ist von P verschieden.*

Nach Satz 5 ist die Abbildung I der Menge der Punkte auf o auf sich, welche jedem Punkt den zu ihm polaren Punkt zuordnet, eineindeutig und fixpunktfrei. Wegen der Symmetrie der Polarität von Punkten ist I involutorisch. Sie ist auch projektiv, wie man dem auch hier gültigen Beweis von Lemma 12 entnimmt.

Damit gilt der erste Teil des nachstehenden Theorems. Der zweite Teil desselben ergibt sich wie der zweite Teil in Teil A von Theorem 1.

THEOREM 2. *Eine in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ erklärte singuläre projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, für welche die Forderungen* T 1, T 2, T 3 *erfüllt sind, läßt sich in eine singuläre projektiv-metrische Struktur der Ebene $\mathfrak{P}$ einbetten, deren absolute Polarinvolution* | *durch die singuläre Pol-Polarenbeziehung in $\mathfrak{T}$ eindeutig bestimmt ist.*

Die Bewegungsgruppe von $\mathfrak{T}$ ist einer Untergruppe der Bewegungsgruppe der singulären projektiv-metrischen Ebene mit | *als absoluter Polarinvolution isomorph.*

C. Schlußfolgerungen

Wir wollen nun Theorem 1 und 2 auf die Theorie der metrischen Ebenen anwenden, wie sie in [5] entwickelt wurde.

Wir betrachten also eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die in bezug auf ein nur aus involutorischen Elementen bestehendes Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ dem in [5], § 1 formulierten Axiomensystem genügt. Wie in [5] ausgeführt, lassen sich die Elemente aus $\mathfrak{S}$ zu Büscheln zusammenfassen, von denen je zwei verschiedene höchstens ein Element gemeinsam haben. Man kann dann der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Gruppenebene dadurch zuordnen, daß man die Elemente von $\mathfrak{S}$ Geraden, die Büschel Punkte und eine Gerade g mit einem Punkt P inzident nennt, wenn g dem P definierenden Büschel angehört. Ferner nennt man zwei Geraden g, h zueinander senkrecht, wenn ihr Produkt gh involutorisch ist. Eine Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte der Gruppenebene braucht nicht zu existieren; ist sie aber vorhanden, so ist sie eindeutig bestimmt. Ein Punkt der Gruppenebene, der mit allen anderen Punkten verbindbar ist, heißt ein eigentlicher Punkt. Aus dem Axiomensystem ergibt sich, daß mindestens drei nicht kollineare eigentliche Punkte vorhanden sind.

In [5] wird gezeigt, daß es zu jeder Geraden g der Gruppenebene, die nicht dem Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehört, ein Lotbüschel $G(g)$ gibt, welches die sämtlichen Senkrechten zu g und — gegebenenfalls außer g selbst — auch nur Senkrechte zu g enthält. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ heißt regulär, wenn es eine Gerade g gibt, welche ihrem Lotbüschel nicht angehört. Ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ regulär, so besteht das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$ nur aus dem Einselement.

Wir nennen nun $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ einbettbar, wenn die Gruppenebene von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ in eine Pappussche Ebene derart eingebettet werden kann, daß die Punkte der Gruppenebene die sämtlichen Punkte der Pappusschen Ebene sind, und die Geraden der Gruppenebene gewissen (nicht notwendig allen) Geraden der Pappusschen Ebene eineindeutig unter Erhaltung der Inzidenz zugeordnet werden können. Diese Pappussche Ebene nennen wir die *Idealebene* von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$.

Sei $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ im folgenden regulär. Wir betrachten dann die Abbildung φ mit

$$g\varphi = G(g). \tag{1}$$

φ ist eine eindeutige Abbildung der Menge der Geraden der Gruppenebene auf die Menge aller der Punkte der Gruppenbene, welche Lotbüschel sind. φ hat die Eigenschaft $(^{**}_{*})$ aus Teil B, denn wegen der Symmetrie des Senk-

rechtstehens in der Gruppenebene hat $g \in G(h)$ zur Folge $h \in G(g)$. Ist φ eineindeutig, so ist $(^{**}_{*})$ gleichbedeutend mit $(*)$ aus Teil A.

Ist demnach $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ regulär und einbettbar, so bilden in der Idealebene von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ die Menge $\mathfrak{m}$ aller der Geraden, die Geraden der Gruppenebene eineindeutig zugeordnet sind, und die Menge $\mathfrak{M}$ aller der Punkte, welche Lotbüschel sind, eine projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, die entweder ordinär oder singulär ist, je nachdem, ob φ in (1) eineindeutig oder nicht eineindeutig ist.

Nach der Bemerkung zu Lemma 3 gilt in der Idealebene das Fano-Axiom, da es nach Definition eine Gerade g mit $g \notin G(g)$, also mit $g \mathrel{\mathfrak{I}} g\varphi$ gibt, wenn $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ regulär ist.

Die Spiegelungen der Gruppenebene, wie sie in [5], § 2 definiert sind, haben, als Abbildungen in $\mathfrak{T}$ aufgefaßt, die Eigenschaften von Spiegelungen an Geraden in $\mathfrak{T}$. Nach [5], § 2 gelten damit für $\mathfrak{T}$ die Forderungen T 1 und T 2. Da es in der Gruppenebene eigentliche Punkte gibt, gilt auch die erste Forderung in T 3; die zweite gilt für alle $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, die dem Axiomensystem in [5], § 1 genügen, mit zwei Ausnahmen, den Gruppen $O_3^+(K, f)$ mit nichtnullteiliger symmetrischer Bilinearform f vom Rang 3 über den Primkörpern der Charakteristik 3 und 5, wenn $\mathfrak{S}$ jeweils die Menge aller Involutionen aus der entsprechenden Gruppe ist.

Wir wollen den Beweis hierfür kurz andeuten, wobei die im folgenden verwendeten Begriffe, Bezeichnungen, Theoreme und Sätze stets [5] entnommen sind.

Sei g eine Gerade, auf der ein eigentlicher Punkt E liegt, und $G = G(g)$ das Lotbüschel von $g \cdot G$ inzidiert dann mit wenigstens zwei Geraden a, b. Gilt Axiom $\sim PD$ für $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, so ist G nach Satz 33 nicht Zentrumsbüschel, mithin ab nicht involutorisch, und somit a^b eine von a und b verschiedene Gerade durch G. Der Beweis von Satz 43a lehrt dann, daß g mit wenigstens drei verschiedenen eigentlichen Büscheln inzidiert.

Es möge also Axiom PD für $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ gelten. Dann inzidiert g nach Satz 43b mit wenigstens drei verschiedenen eigentlichen Punkten, wenn durch G wenigstens sechs verschiedene Geraden gehen. Wir brauchen also nur den Fall zu betrachten, daß durch G höchstens fünf Geraden gehen. Ersichtlich kann es dann auf einer Geraden h, die mit G nicht inzidiert, höchstens fünf eigentliche Punkte geben, denn die Verbindungsgeraden verschiedener eigentlicher Punkte auf h mit G sind voneinander verschiedene Geraden durch G. Da es nun sicher eine Bewegung der Gruppenebene gibt, die eine Gerade durch G in eine nicht mit G inzidierende Gerade überführt, kann auch eine Gerade durch G höchstens fünf eigentliche Punkte tragen. Mithin kann es nur endlich viele eigentliche Punkte, nämlich höchstens $5 \cdot 5$ eigentliche Punkte in der Gruppenebene geben. Dies hat zur Folge, daß $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ endlich ist. Wäre nämlich $\mathfrak{G}$, also nach Satz 13 auch $\mathfrak{S}$ nicht endlich, so gäbe es mindestens einen Punkt $F \neq E$, welcher mit unendlich vielen Geraden inzidiert. Von den eigentlichen Punkten E^x für alle x mit $x \in F$ sind dann höchstens je zwei identisch: Sei a die Verbindungsgerade von E mit F und x eine Gerade durch

F. Für jede Gerade y durch F mit $E^x = E^y$ gilt dann, da nach Satz 5 $axy = z \in F$ ist, $E^z = E^{axy} = E^{xy} = E$, mithin nach Satz 8 entweder $z \in E$ und damit $z = a$, also $x = y$, oder $E = G(z)$. Da es höchstens ein z mit $G(z) = E$ geben kann, kann es zu jedem x mit $x \in F$ höchstens ein y mit $xy = az$, also mit $E^x = E^y$ und $x \neq y$ geben.

Die Menge der eigentlichen Punkte E^x für alle $x \in F$ ist also nicht endlich, im Widerspruch zum vorher Überlegten. Also ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ endlich und Theorem 2 in Verbindung mit Satz 47 und 43b lehren, daß nur für die beiden oben genannten Gruppen Geraden vorhanden sind, die zwar einen, aber nicht drei verschiedene eigentliche Punkte tragen.

Da für die Ausnahmegruppen das nachstehende Theorem trivialerweise gilt, können wir allgemein formulieren:

THEOREM 3. *Eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die in bezug auf ein nur aus involutorischen Elementen bestehendes Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ dem Axiomensystem in* [5], § 1 *genügt und für welche $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ regulär und einbettbar ist, kann als Untergruppe der Bewegungsgruppe einer projektiv-metrischen Ebene dargestellt werden.*

Nach [1], § 9, Theorem 4—6 gilt weiter das

THEOREM 4. *Genügt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ den in Theorem 3 formulierten Voraussetzungen, so läßt sich $\mathfrak{G}$ als Untergruppe einer eigentlich-orthogonalen Gruppe $O_3^+(K, f)$ darstellen, wobei K ein Körper von Charakteristik $\neq 2$ und f eine symmetrische Bilinearform vom Rang 3 oder eine symmetrische, nullteilige Bilinearform vom Rang 2 ist.*

Wir merken abschließend an, daß nach Theorem 3 und 4 die Begründung aller metrischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$ vollendet ist, die durch das Axiomensystem in [7] gegeben sind, denn deren Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ genügt in bezug auf das Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ der Geradenspiegelungen dem Axiomensystem in [5], und $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ ist einer mündlichen Mitteilung Herrn SPERNERS zufolge einbettbar.

Literatur

[1] BACHMANN, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Grundlehren d. math. Wiss., Bd. 96. 1959.

[2] KARZEL, H.: Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie. Arch. Math. **6**, 66—76 (1955).

[3] KARZEL, H.: Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien. Arch. Math. **6**, 284—295 (1955).

[4] LINGENBERG, R.: Begründung der absoluten Geometrie der Ebene. Diss. Kiel 1955.

[5] LINGENBERG, R.: Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. I, II. Math. Ann. **137**, 26—41, 83—106 (1959).

[6] SCHMIDT, A.: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. **118**, 609—635 (1943).

[7] SPERNER, E.: Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von DESARGUES in der absoluten Axiomatik. Arch. Math. 458—468 (1954).

Hannover, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 14. Dezember 1959)

Vor kurzem erschien:

Cluster Sets

By Professor Dr. KIYOSHI NOSHIRO,

Mathematical Institute Nagoya University, Nagoya/Japan

(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 28.
Reihe: Moderne Funktionentheorie. Besorgt von L. V. AHLFORS)

VIII, 135 Seiten Gr.-8°. 1960. In englischer Sprache. DM 36,—

CONTENTS

Definitions and preliminary discussions: Definitions of cluster sets. Some classical theorems · Single-valued analytic functions in general domains: Compact set of capacity zero and Evans-Selberg's theorem. Meromorphic functions with a compact set of essential singularities of capacity zero. Extension of Iversen's theorem on asymptotic values. Extension of Iversen-Gross-Seidel-Beurling's theorem. Hervé's theorems · Functions meromorphic in the unit circle: Functions of class (*U*) in Seidel's sence. Boundary theorems of COLLINGWOOD and CARTWRIGHT. Baire category and cluster sets. Boundary behaviour of meromorphic functions. Meromorphic functions of bounded type and normal meromorphic functions · Conformal mapping of Riemann surfaces: Gross' property of covering surfaces. Iversen's property of covering surfaces. Boundary theorems on open Riemann surfaces · Appendix: Cluster sets of pseudo-analytic functions · Bibliography · Subject Index.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Algebra I

Von Dr. BARTEL L. VAN DER WAERDEN,
Professor der Mathematik an der Universität Zürich
Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. 33. Band)

Fünfte Auflage der Modernen Algebra. Erster Teil
VIII, 292 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 22,—

INHALTSÜBERSICHT

Zahlen und Mengen. Gruppen. Ringe und Körper. Ganze rationale Funktionen. Körpertheorie. Fortsetzung der Gruppentheorie. Die Theorie von GALOIS. Unendliche Körpererweiterungen. Reelle Körper. Bewertete Körper · Sachverzeichnis.

AUS DEN BESPRECHUNGEN DER VIERTEN AUFLAGE

„Unter dem gekürzten Titel erschien nun die vierte Auflage des ersten Teiles der ‚Modernen Algebra', die die besondere Darstellungskunst des Verfassers zu einem der bekanntesten Werke der mathematischen Literatur machte. Das Buch, dessen ausführliche Besprechung sich aus diesem Grund wohl erübrigt, hat in Zielsetzung und Anlage seinen Charakter in allen Auflagen bewahrt: Der vorliegende Teil bringt eine Einführung in die drei großen Gebiete ‚Gruppentheorie', ‚Körpertheorie' und ‚Bewertungstheorie', wobei diese Abschnitte möglichst unabhängig voneinander entwickelt werden. Nicht nur für den Mathematiker ist das Buch ein Standardwerk, wenn man an die Anforderungen denkt, die die moderne theoretische Physik in mathematischer Hinsicht in immer steigendem Maße stellt ..." *Acta Physica Austriaca*

Früher erschien:

Algebra II

Von Professor Dr. B. L. VAN DER WAERDEN

(Die Grundlehren der math. Wissenschaften, 34. Band)
Vierte Auflage der Modernen Algebra. Zweiter Teil
X, 275 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 29,60

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A.G., Würzburg
Printed in Germany